1. $x = 1998,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$

$= \dfrac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$= \dfrac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$

2. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$　　② 0　　③ 20

④ $-2 + 4i$　　⑤ -4

해설

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2 \\ &z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &\qquad\quad = 8 - 12 \\ &\qquad\quad = -4 \end{aligned}$$

3. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{i-2}=i+2$

② $\overline{2i}=-2i$

③ $\overline{\sqrt{2}+i}=\sqrt{2}-i$

④ $\overline{1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$

⑤ $\overline{3-2i}=3+2i$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호가 바뀐다.
실수의 켤레복소수는 자기자신이다.
① $\overline{i-2}=-i-2$

4. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2-2i$　　② $2\pm3i$　　③ $2\pm\sqrt{3}i$
④ $3\pm2i$　　⑤ $4\pm3i$

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
$z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 에서
$(a+bi)(a-bi) = 13$, $(a+bi)+(a-bi) = 4$
$a^2 + b^2 = 13$, $2a = 4$
$\therefore\ A = 2,\ b = \pm3$
$z = 2 \pm 3i$

5. 실수 x 에 대하여 $|x-2|^2 - |3-x|^2 - \sqrt{-9} + \sqrt{-16}$ 을 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -5　② $2x-4$　③ $2x$
④ $2x-5$　⑤ 0

해설

$$(\text{준식}) = (x-2)^2 - (3-x)^2 - 3i + 4i$$
$$= 2x - 5 + i$$
$$\therefore a = 2x-5\ ,\ b = 1$$
$$\therefore a + b = 2x - 4$$

6. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은? (단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$

② $z + \bar{z} = 0$

③ $z + \bar{z} = 1$

④ $z + \bar{z} = -1$

⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$\therefore z\bar{z} = 1$

7. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

8. 집합 $A = \{z \mid z = p(1-i) + q(1+i)\}$ 에 대하여 다음 중 집합 A 의 원소인 것은? (단, p, q 는 양의 실수)

① $-4-2i$ ② $-3+i$ ③ $-2+i$

④ $2+3i$ ⑤ $5-2i$

해설

$z = p(1-i) + q(1+i)$ 에서 $z = p + q + (-p+q)i$

① $p+q=-4$, $-p+q=-2$ 이므로

$p=-1,\ q=-3$

$\therefore\ -4-2i \notin A$

② $p+q=-3$, $-p+q=1$ 이므로

$p=-2,\ q=-1$

$\therefore -3+i \notin A$

③ $p+q=-2$, $-p+q=1$ 이므로

$p=-\frac{3}{2},\ q=-\frac{1}{2}$

$\therefore -2+i \notin A$

④ $p+q=2$, $-p+q=3$ 이므로

$p=-\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{2}$

$\therefore 2+3i \notin A$

⑤ $p+q=5$, $-p+q=-2$ 이므로

$p=\frac{7}{2},\ q=\frac{3}{2}$

$\therefore 5-2i \in A$

9. $(3+i)(a+bi)=1-3i$를 만족하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(3+i)(a+bi)=1-3i$

$(3a-b)+(a+3b)i=1-3i$

$\therefore\ 3a-b=1,\quad a+3b=-3$

$\Rightarrow\quad a=0,\quad b=-1$

$\therefore\ a+b=-1$

10. $(1+i)^{10}$ 의 값은?

① $10-i$ ② $4i$ ③ $8i$ ④ $16i$ ⑤ $32i$

해설

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \left\{(1+i)^2\right\}^5 = (1+2i+i^2)^5 \\ &= (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i\end{aligned}$$

11. $x=-2+i$ 일때, x^3+4x^2-3x+2 의 값은?

① $-15+5i$ ② $-12+2i$ ③ $14-4i$
④ $16-6i$ ⑤ $18-8i$

해설

$x=-2+i$ 에서 $x+2=i$ 의 양변을 제곱하면
$x^2+4x+5=0$ 즉 $x^2+4x=-5$ 이므로
x^3+4x^2-3x+2
$=x(x^2+4x)-3x+2$
$=-5x-3x+2$
$=-8x+2$
$=-8(-2+i)+2$
$=18-8i$

12. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x| \cdot |x^2-1|i \\ &= |x| \cdot |x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x = 0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

13. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$

$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+\sqrt{3}=2x,\ \sqrt{3}x-1=2$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

14. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{101}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)-f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① $-i$ ② $-2i$ ③ $-3i$ ④ i ⑤ $2i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i^2+2i}{1-i^2}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i^2-2i}{1-i^2}=-i$$

$$\begin{aligned}f(i)-f(-i)&=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{101}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{101}\\&=(-i)^{101}-(i)^{101}\\&=-2i^{101}\\&=-2i(\because i^4=1)\end{aligned}$$

15. $z = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\overline{z} - 1}{z} - \dfrac{z - 1}{\overline{z}}$ 의 값은?

① $-i$　② i　③ $-2i$　④ $2i$　⑤ 1

해설

$z = 1 - i, \overline{z} = 1 + i$

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{i}{1-i} - \dfrac{-i}{1+i} = \dfrac{2i}{2} = i$

16. 다음 보기 중 옳은 것은 <u>모두</u> 몇 개인가?

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = \sqrt{10}$	㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = -6$
㉢ $(-\sqrt{-2})^2 = -2$	㉣ $(\sqrt{-3})^3 = -3\sqrt{3}i$
㉤ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = -2i$	㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = -2$

① 2 개　② 3 개　③ 4 개　④ 5 개　⑤ 6 개

해설

㉢, ㉣, ㉤이 옳다.

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = -\sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = 6i$

㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = 2i$

17. 복소수 $x=a+bi$(a, b는 실수)가 $x^2=3+4i$, $x^3=2+11i$를 만족할 때 $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3+4i)(a+bi) \\ &= (3a-4b)+(4a+3b)i \end{aligned}$$

$(3a-4b)+(4a+3b)i=2+11i$

$3a-4b=2,\ 4a+3b=11$

$\therefore a=2, b=1$ 이므로 $a+b=3$

해설

$x=\dfrac{x^3}{x^2}=a+bi$

$$\begin{aligned} \frac{2+11i}{3+4i} &= \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{50+25i}{25} \\ &= 2+i \end{aligned}$$

$\therefore a=2, b=1$

18. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2,\ \overline{\alpha} = 2$

19. 복소수 $\alpha = a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b+ai$ 로 나타낸다.$\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$　　② $3+3i$　　③ $2+3i$

④ $1+3i$　　⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai) \\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4 \\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4 \\ &= 4+3i\end{aligned}$$

20. $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 일 때 $x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2

④ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\frac{-5+\sqrt{3}i}{4}$

해설

$x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 에서 $2x+1 = \sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+x+1=0 \therefore\ x+\frac{1}{x}=-1$

$$\therefore\ (\text{준식}) = x + \cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-1}}$$
$$= x + \frac{x-1}{x^2-x+1}$$
$$= x + \frac{x-1}{-2x}$$
$$= \frac{-2x^2+x-1}{-2x}$$
$$= \frac{-2(-x-1)+x-1}{-2x}$$
$$= \frac{3x+1}{-2x}$$
$$= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$$
$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{-5+\sqrt{3}i}{4}$$