1. $x = 1 + \sqrt{2}i,\ y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

2. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$
④ -1　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2+i$, $\overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

3. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2　② -1　③ 1　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1 \\ &= (a+b+1) - (a-b)i \\ &= a - bi \text{ 에서}\end{aligned}$$

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

4. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$ ② $-3+9i$ ③ $3-9i$
④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$ ⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면
$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$
$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$
$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-3b+3=0$, $3a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$
$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

5. 다음 식을 간단히 하면?

$$
{}^{3}\sqrt{-8}+\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{-8}\sqrt{-2}
+\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}
$$

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

(주어진 식)

$= {}^{3}\sqrt{(-2)^3}+\sqrt{4}+\sqrt{8}i\cdot\sqrt{2}i$

$\quad +\frac{\sqrt{16}i}{\sqrt{4}i}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$

$= -2+2+\sqrt{8\cdot 2}i^2+\sqrt{\frac{16}{4}}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

$= -2+2-4+2$

$= -2$

※ 참고

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 항상 성립하는 a, b의 부호를 생각해 보자.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 이므로

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$이 된다고 계산할 수도 있다.

그러나 조심해야 할 것은 공식에서 주어지는 조건들이다.

즉, $a<0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 성립한다.

마찬가지로 $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{-\frac{10}{5}}=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$라고 함부로 계산해서는 안 된다.

왜냐하면 $a>0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 성립하기 때문이다.

6. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?
(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$　　② $z + \bar{z} = 0$
③ $z + \bar{z} = 1$　　④ $z + \bar{z} = -1$
⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$\therefore z\bar{z} = 1$

7. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3 \neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1) \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -3$
$\therefore\ x=-1$

8. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$

$\therefore\ \frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=2-i$ 이므로,

복소수의 상등에서 $x+y=4$, $-x+y=-2$

이것을 풀면 $x=3$, $y=1$

따라서, $2x+y=2\times3+1=7$

9. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 ab의 값을 구하면?

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

해설

$\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10,$

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

10. $f(x) = \dfrac{x}{1-i}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006} + \{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2　　② $-1+i$　　③ -1

④ $-1-i$　　⑤ 2

해설

$f(1+i) = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$g(1-i) = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= (i)^{2006} + (-i)^{2007} \\ &= i^2 + (-i)^3 \ (\because i^{2004} = (-i)^{2004} = 1) \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

11. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^{n}$

$i^{n} = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ ($m \geq 0$)

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

12. 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

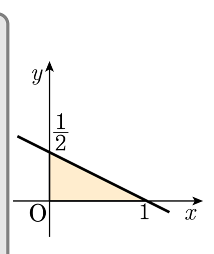
(준식) $= (2x-2y)+(x+2y-1)i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



13. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$
$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+\sqrt{3}=2x,\ \sqrt{3}x-1=2$
$\therefore\ x=\sqrt{3}$

14. 2010개의 정수 $a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1 이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i　② $-i$　③ $i,\ -i$　④ -1　⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이므로
$a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 중에는 -1 이 홀수 개가 있다.
(i) -1 이 $4k+1$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 개일 때
$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$
(ii) -1 이 $4k+3$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 개일 때
$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$
따라서 만족하는 x 의 값은 $i,\ -i$ 이다.

15. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z=x+yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z}=3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z+\frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x ② y ③ $x+y$
④ $x-y$ ⑤ $2x+y$

해설

$z=x+yi$, $\bar{z}=x-yi$ 이므로

$z\cdot\bar{z}=3$ 이면 $\bar{z}=\frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z+\frac{3}{z}\right)&=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\\&=\frac{1}{2}(x+yi+x-yi)\\&=x\end{aligned}$$

16. $a < 0$, $b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ ② $\dfrac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = ab$ ④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}i$

해설

① $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$
$= (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b}$
$= \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
$= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
$= -\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

17. $z \cdot \bar{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 $z_1,\ z_2$ 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$ 는 각각 $z_1,\ z_2$ 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
($a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)로 놓으면
$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서
$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠
$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서
$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡
$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a + c = 2,\ b + d = 0$
㉠ − ㉡을 하면
$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$
$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$
그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$
$\therefore\ a = -c$ 또는 $a = c$
그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$
㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$
따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로
$z_1 \cdot z_2 = 1$

18. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 <u>모두</u> 고르면 ? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $(z+1)^2$
>
> ㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z$
>
> ㉢ $\left(z^2+z+1\right)(\bar{z}+1)+\left((\bar{z})^2+\bar{z}+1\right)(z+1)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$
(허수)
㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$ (실수)
($\because$ $z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)
㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)=Z$ 라 하면
(준식)$=Z+\overline{Z}$ 이므로 실수
따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.

19. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$일 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$의 값을 구하면? (단, $i^2 = -1$)

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 하면
$\alpha^3 = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$
$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots$ ㉠
$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots$ ㉠
$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 ㉡에 대입하면
$b(9b^2 - b^2) = 1,\ 8b^3 = 1$

$\therefore\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a = \sqrt{3}b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\therefore\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \sqrt{3}$

20. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{1}{3\omega^2+4\omega+2} = a + b\omega$ 를 만족하는 실수 a, b 의 값에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$2\omega + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하면,

$4\omega^2 + 4\omega + 4 = 0$

$\therefore\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\begin{aligned} 3\omega^2 + 4\omega + 2 &= 3(\omega^2+\omega+1) + \omega - 1 \\ &= \omega - 1 \end{aligned}$$

$\frac{1}{\omega - 1} = a + b\omega$ 에서

$(a+b\omega)(\omega-1) = 1$

$(a-2b)\omega - (a+b) = 1 \leftarrow \omega^2 = -\omega - 1$

$\therefore\ a - 2b = 0,\ a + b = -1$ 에서

$a = -\frac{2}{3},\ b = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ a + b = -1$