

1. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.

③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

2. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

- ① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여

$$(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= -2ab + 2|a||b| > 0 \text{ 이려면}$$

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

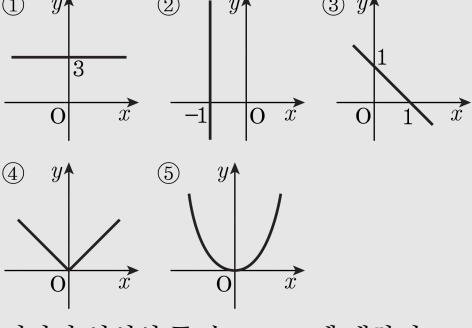
따라서 $ab < 0$

4. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

- ① $y = 3$
- ② $x = -1$
- ③ $y = -x + 1$
- ④ $y = |x|$
- ⑤ $y = x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다. 따라서 만족하는 함수는 ③이다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

6. 두 함수 f, g 가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x - 1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

① 18

② 12

③ -15

④ -24

⑤ -29

해설

$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로

$$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$$

$$\therefore (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$$

7. 다음 중에서 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것을 고르면?

- ① $p : a = b, q : ac = bc$
- ② $p : a > b, q : a^2 > b^2$
- ③ $p : A \subset (B \cap C), q : A \subset (B \cup C)$
- ④ $p : x + y = 1, q : x = 2, y = -1$
- ⑤ $p : |x - 1| < 1, q : |x| < 1$

해설

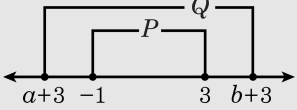
$q \rightarrow p$ 가 참. 즉, 주어진 명제의 역이 참인 것을 찾는다.
① 충분조건 반례 : $c = 0, a = 1, b = 2$
② 충분조건 반례 : $a = -2, b = -1$
③ 합집합에 포함된다 하여 교집합에 포함된다고 할 수 없다.
 $(B \cap C) \subset (B \cup C)$ 이므로 $p \rightarrow q$ (충분조건)
④ 역 : $x = 2, y = -1$ 이면 $x + y = 1$ 이다.(참)
⑤ $|x - 1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2, |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ 이므로 $q \Rightarrow p$

8. 두 조건 $p: -1 \leq x < 3$, $q: a \leq x-3 \leq b$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값을 M , b 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

해설

$p: -1 \leq x \leq 3$
 $q: a \leq x-3 \leq b \rightarrow a+3 \leq x \leq b+3$
 $p \rightarrow q \therefore P \subset Q$



$\therefore a+3 \leq -1, b+3 \geq 3 \rightleftharpoons a \leq -4, b \geq 0$
 $\therefore M = -4, m = 0, M+m = -4$

9. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

- $\textcircled{\tiny 1} \ f : x \rightarrow |x|^2$
- $\textcircled{\tiny 2} \ g : x \rightarrow x + 2$
- $\textcircled{\tiny 3} \ h : x \rightarrow |x| + 1$
- $\textcircled{\tiny 4} \ i : x \rightarrow x^2 - 1$
- $\textcircled{\tiny 5} \ j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개
- ② 2개
- ③ 3개
- ④ 4개
- ⑤ 5개

해설

$\textcircled{\tiny 1} \ f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
 $f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
 $f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
 $\textcircled{\tiny 2} \ g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$
 $g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$
 $g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$
 $\textcircled{\tiny 3} \ h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$
 $h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$
 $h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$
 $\textcircled{\tiny 4} \ i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
 $\textcircled{\tiny 5} \ j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ④, ⑤는 함수가 될 수 없고 ①, ②, ③ 3개 만 함수가 될 수 있다.

10. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x+1) = f(x+2)$ 로 정의될 때, $g(0)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$g(x+1) = f(x+2)$ 에 $x = -1$ 을 대입하면

$g(0) = f(1)$

$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore g(0) = 0$

11. 두 집합 $X = \{-1, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의
두 함수 $f(x) = ax - b$, $g(x) = x^3 + x - 1$ 가 서로 같을 때, 상수 a , b
의 합 $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 함수가 서로 같으므로
 $f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$ 이다.
 $-a - b = -3$, $a - b = 1$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$
 $\therefore a + b = 3$

12. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면
 -1 이 대응할 수 있는 원소는
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지.
 0 이 대응할 수 있는 원소는
 $f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,
즉 0 의 1가지
 1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

13. 두 함수 $f(x) = x - 1, g(x) = x^2 + 4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f))(x) = 18$ 을 만족하는 실수 x 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f))(x) &= f(g(f(x))) = f(g(x-1)) \\ &= f((x-1)^2 + 4) \\ &= f(x^2 - 2x + 5) \\ &= (x^2 - 2x + 5) - 1 \\ &= x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

$$(f \circ (g \circ f))(x) = 18$$

$$\text{이므로 } x^2 - 2x + 4 = 18, \quad x^2 - 2x - 14 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x 의 값의 합은 2 이다.

14. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

15. 전체집합 U 의 임의의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 <보기>의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

- (1) $A \subset B$ 는 $A - B = \emptyset$ 이 되기 위한 조건이다.
- (2) $B = C$ 는 $A \cup B = A \cup C$ 이 되기 위한 조건이다.

- ① 필요, 필요충분

② 필요, 필요
- ③ 필요충분, 필요충분

④ 필요충분, 충분
- ⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B, A \supset C, B \subset C$ 이면 성립하지 않는다.

16. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$ 의 값을 구하면?
- ① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n 에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases} \text{이므로}$$
$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

17. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 에 대하여 $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$

일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{99}$ ② $\frac{99}{100}$ ③ $\frac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

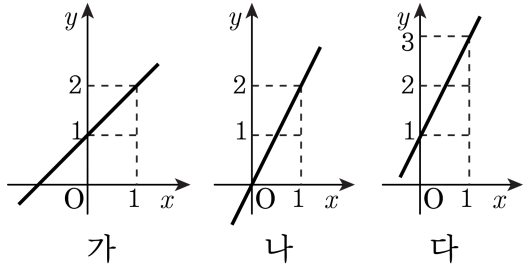
$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.

즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

$$\text{따라서 } f_{100}(x) = f_{3 \times 33 + 1}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

18. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



다음 중 $w(x)$ 를 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

- ① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f + g$ ⑤ $f - g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면
 $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $w(x) = 2x + 1$ 이다.
 $f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로
 $\therefore w = f \circ g$

19. $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$ 인 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$ 를 만족시킬 때, $k = xy + yz + zx$ 가 가질 수 있는 값의 범위는?

- ① $1 < k \leq \frac{4}{3}$ ② $1 \leq k < \frac{4}{3}$ ③ $0 < k < 2$
④ $0 < k \leq 2$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$x < 1$, $y < 1$ 에서 $1 - x > 0$, $1 - y > 0$ 이므로 $(1 - x)(1 - y) > 0$

양변에 $x + y - 1$ 을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면

$$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$$

마찬가지방법으로 yz , zx 를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1 \\ yz = (1 - y)(1 - z) - (1 - y - z) > y + z - 1 \\ zx = (1 - z)(1 - x) - (1 - z - x) > z + x - 1 \end{cases} \quad \text{에서}$$

$$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

또, $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ 에서 ($\because x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$)

에서 양 변에 $3(xy + yz + zx)$ 를 더한다)

$$4 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 1 < xy + yz + zx \leq \frac{4}{3}$$

20. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내면?

① $\frac{f(x)}{f(x)-1}$

② $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

③ $\frac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$

⑤ $\frac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x-1} \text{ 에서 } x = \frac{f(x)}{f(x)-1} \\ \therefore f(3x) &= \frac{3x}{3x-1} = \frac{3 \cdot \frac{f(x)}{f(x)-1}}{3 \cdot \frac{f(x)}{f(x)-1} - 1} \\ &= \frac{3f(x)}{2f(x)+1} \end{aligned}$$