1. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b$, $\quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5$, $\quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3$, $\quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0$, $\quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz$, $\quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

2. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$

④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$ ② $ab \geq 0$ ③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

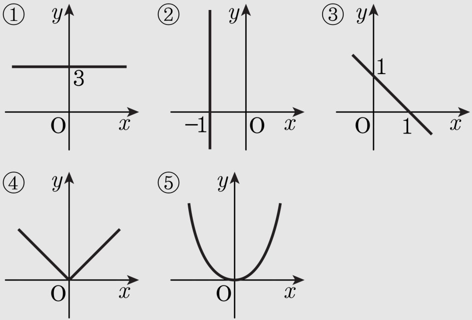
4. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

① $y = 3$ ② $x = -1$ ③ $y = -x + 1$

④ $y = |x|$ ⑤ $y = x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다.

따라서 만족하는 함수는 ③이다.

5. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f 중에서 $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1}가 존재하므로, f는 일대일대응이다.

(i) $f(1)=1$일 때,

$f(2)=2,\ f(3)=3$ 또는 $f(2)=3,\ f(3)=2$

(ii) $f(1)=2$일 때,

$f(2)=f^{-1}(2)=1$이므로 $f(3)=3$

(iii) $f(1)=3$일 때,

$f(3)=f^{-1}(3)=1$이므로 $f(2)=2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는 4개이다.

6. 두 함수 f, g가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x-1) = -6x+5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g와 f의 합성함수이다.)

① 18 ② 12 ③ -15 ④ -24 ⑤ -29

해설

$(f \circ g)(5) = f(g(5))$

$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로

$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$

$\therefore\ (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$

7. 다음 중에서 p가 q이기 위한 필요조건인 것을 고르면?

① $p : a = b,\ q : ac = bc$

② $p : a > b,\ q : a^2 > b^2$

③ $p : A \subset (B \cap C),\ q : A \subset (B \cup C)$

④ $p : x + y = 1,\ q : x = 2,\ y = -1$

⑤ $p : |x-1| < 1,\ q : |x| < 1$

해설

$q \to p$ 가 참. 즉, 주어진 명제의 역이 참인 것을 찾는다.
① 충분조건 반례 : $c = 0, a = 1, b = 2$
② 충분조건 반례 : $a = -2, b = -1$
③ 합집합에 포함된다 하여 교집합에 포함된다고 할 수 없다.
$(B \cap C) \subset (B \cup C)$이므로$p \to q$(충분조건)
④ 역 : $x = 2,\ y = -1$ 이면 $x + y = 1$ 이다.(참)
⑤ $|x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2, |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ 이므로 $q \nRightarrow p$

8. 두 조건 $p: -1 \leqq x < 3$, $q: a \leqq x-3 \leqq b$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

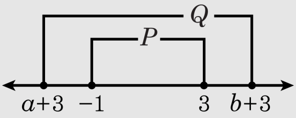
① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

$p: \ -1 \leqq x \leqq 3$

$q: a \leqq x-3 \leqq b \rightarrow a+3 \leqq x \leqq b+3$

$p \rightarrow q \therefore P \subset Q$



$\therefore a+3 \leq -1, b+3 \geq 3$ 즉, $a \leq -4, b \geq 0$

$\therefore M=-4, m=0,\ M+m=-4$

9. 다음 보기 중 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f: x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g: x \rightarrow x+2$

㉢ $h: x \rightarrow |x|+1$

㉣ $i: x \rightarrow x^2-1$

㉤ $j: x \rightarrow |x|+3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1)=|-1|^2=1\in Y$
$f(1)=|1|^2=1\in Y$
$f(2)=|2|^2=4\in Y$

㉡ $g(-1)=-1+2=1\in Y$
$g(1)=1+2=3\in Y$
$g(2)=2+2=4\in Y$

㉢ $h(-1)=|-1|+1=2\in Y$
$h(1)=|1|+1=2\in Y$
$h(2)=|2|+1=3\in Y$

㉣ $i(-1)=i(1)=0\notin Y$

㉤ $j(2)=5\notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

10. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x+1) = f(x+2)$로 정의될 때, $g(0)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(x+1) = f(x+2)$에 $x = -1$을 대입하면

$g(0) = f(1)$

$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore\ g(0) = 0$

11. 두 집합 $X = \{-1, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 두 함수 $f(x) = ax - b$, $g(x) = x^3 + x - 1$가 서로 같을 때, 상수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 함수가 서로 같으므로

$f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$ 이다.

$-a - b = -3$, $a - b = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$

$\therefore\ a + b = 3$

12. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키려면
-1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지.
0 이 대응할 수 있는 원소는
$f(-0)=-f(0)$ 에서, $2f(0)=0$,
즉 0 의 1 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5\times1\times1=5$ (개)

13. 두 함수 $f(x) = x - 1, g(x) = x^2 + 4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f))(x) = 18$ 을 만족하는 실수 x 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f))(x) &= f(g(f(x))) = f(g(x-1)) \\ &= f((x-1)^2 + 4) \\ &= f(x^2 - 2x + 5) \\ &= (x^2 - 2x + 5) - 1 \\ &= x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

$(f \circ (g \circ f))(x) = 18$

이므로 $x^2 - 2x + 4 = 18,\ x^2 - 2x - 14 = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x 의 값의 합은 2 이다.

14. 두 함수 $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+k$에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20　② -10　③ 0　④ 10　⑤ 20

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서

$-6x+2k+5=-6x-15+k$

$\therefore\ k=-20$

15. 전체집합 U의 임의의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 <보기>의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

(1) $A \subset B$는 $A - B = \varnothing$이 되기 위한 $\boxed{\text{(가)}}$ 조건이다.
(2) $B = C$는 $A \cup B = A \cup C$이 되기 위한 $\boxed{\text{(나)}}$ 조건이다.

① 필요, 필요충분
② 필요, 필요
③ 필요충분, 필요충분
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B$, $A \supset C$, $B \subset C$이면 성립하지 않는다.

16. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$의 값을 구하면?

① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$$ 이므로

$$f(98) = f(f(100)) = f(99) = f(f(101))$$
$$= f(100) = 99$$

17. $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots$ 에 대하여 $f_0(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x)=f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $\dfrac{99}{100}$ ③ $\dfrac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x)=f_0(f_0(x))=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$$

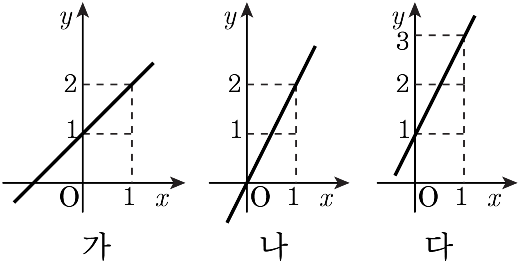
$$f_2(x)=f_0(f(x))=\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$$

$n=2$ 일 때 $f(x)=x$ 이다.
즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

따라서 $f_{100}(x)=f_{3\times33+1}(x)=f_1(x)=\dfrac{x-1}{x}$

$$\therefore\ f_{100}(100)=\frac{100-1}{100}=\frac{99}{100}$$

18. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



다음 중 $w(x)$를 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 나타낸 것은?

① $f \circ g$　② $g \circ f$　③ $f \circ f$　④ $f + g$　⑤ $f - g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면

$f(x) = x + 1,\ g(x) = 2x,\ w(x) = 2x + 1$ 이다.

$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로

$\therefore\ w = f \circ g$

19. $0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1$인 실수 $x,\ y,\ z$가 $x+y+z=2$를 만족시킬 때, $k=xy+yz+zx$가 가질 수 있는 값의 범위는?

① $1<k\le\frac{4}{3}$　② $1\le k<\frac{4}{3}$　③ $0<k<2$

④ $0<k\le 2$　⑤ $1<k<3$

해설

$x<1,\ y<1$에서 $1-x>0,\ 1-y>0$이므로 $(1-x)(1-y)>0$

양변에 $x+y-1$을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면

$xy=(1-x)(1-y)-(1-x-y)>x+y-1$

마찬가지방법으로 $yz,\ zx$를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy=(1-x)(1-y)-(1-x-y)>x+y-1 \\ yz=(1-y)(1-z)-(1-y-z)>y+z-1 \\ zx=(1-z)(1-x)-(1-z-x)>z+x-1 \end{cases}$$ 에서

$xy+yz+zx>2(x+y+z)-3=2\cdot2-3=1$

또, $(x+y+z)^2\ge3(xy+yz+zx)$에서 ($\because\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge0$ 에서 양 변에 $3(xy+yz+zx)$를 더한다)

$4\ge3(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 1<xy+yz+zx\le\frac{4}{3}$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$를 $f(x)$로 나타내면?

① $\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$ ② $\dfrac{3f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\dfrac{3f(x)}{2f(x)-1}$ ⑤ $\dfrac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x = \dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$\therefore f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \frac{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}}{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$= \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$