

1. 집합 $X = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수 함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100

② 50

③ 38

④ 20

⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,

$$f(1) = f(3) = \cdots = f(19) = 2$$

$$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$$

2. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 X 로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$$f(x) = x, \quad g(x) = |x|$$
$$h(x) = x^3, \quad k(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{2}$$

① f

② f, h

③ f, g, h

④ f, h, k

⑤ g, h, k

해설

$f : f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로
항등함수이다.

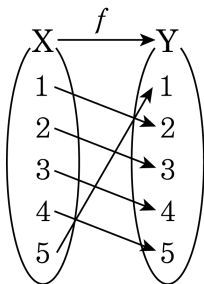
$g : g(-1) = 1$ 이므로 항등함수가 아니다.

$h : h(-1) = -1, h(0) = 0, h(1) = 1$ 이므로
항등함수이다.

$k : k(-1) = -1, k(0) = 0, k(1) = 1$ 이므로
항등함수이다.

따라서 항등함수인 것은 f, h, k 이다.

3. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(f(a)) = 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2$$

$$\therefore a = 1$$

4. 함수 $f(x) = 2x - 5$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2y - 5$
 $x = 2y - 5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

|다른풀이| $f^{-1}(-3) = a$ 로 놓으면

$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$

5. 삼차함수 $y = -x^3$ 에 대하여 정의역이 $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$ 일 때, y 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4

② 5

③ -5

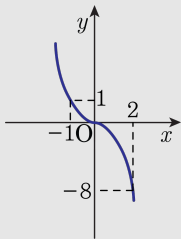
④ 7

⑤ -7

해설

$y = -x^3$ 의 그래프는 다음 그림과 같고
 $x = 2$ 일 때 최소이고, $x = -1$ 일 때 최대이
므로

$$f(2) = -8, f(-1) = 1 \text{ 에서 구하는 값은}$$
$$f(2) + f(-1) = -8 + 1 = -7$$



6. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x - 1$

② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근

③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지

④ $x \rightarrow x^2 - 1$

⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$
따라서 함수가 아니다.

③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

7. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{2} & (x \text{는 무리수}) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{3} & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때, } (g \circ$$

$f)(\pi)$ 의 값은 얼마인가?.

① 0

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 1

⑤ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

해설

$$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

8. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$

② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$

④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$

$$f(a) + f(b) = |a| + |b|$$

이 때 $|a+b| \leq |a| + |b|$

② $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$$

⑤ $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$

$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$$

$$f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$$

$$= a^3 + b^3 + 3(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$$

9. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$

② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$

④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

10. 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

합성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

11. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$

따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

12. 주기가 5인 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 중 $f(2006)$ 과 같은 것을 고르면?

- ① $f(1)$ ② $f(2)$ ③ $f(3)$ ④ $f(4)$ ⑤ $f(5)$

해설

$$f(2006) = f(5 \times 401 + 1) = f(1)$$

13. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

14. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{ 에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

15. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

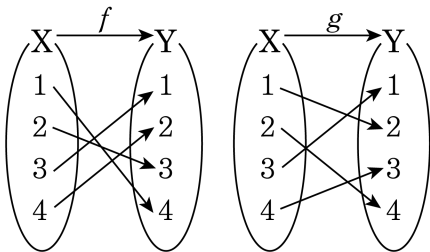
해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

16. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$$\therefore g \cdot f^{-1}$$

$$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$$

$$= h \cdot I = h$$

$$\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$$

$$= g(f^{-1}(2))$$

$$= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$$

$$\therefore g(4) = 3$$

17. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f$, $\dots$, $f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005} \left(-\frac{1}{2} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{2005} \left(-\frac{1}{2} \right) = f^{2004} \left(f \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = f \left(-\frac{1}{2} \right) = 3$$

18. 실수 전체의 집합에서 $f : x \rightarrow ax(a \neq 1)$, $g : x \rightarrow x + b$ 로 정의된 함수 f, g 에 대하여 $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 가 성립할 때, ab 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ax + ab$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - b \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

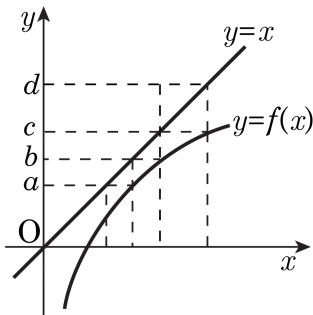
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x, \quad g^{-1}(x) = x - b$$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{a}(x - b) \\ &= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{\text{㉡}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } b = \frac{b}{a}(a \neq 1) \text{ 이므로 } b = 0$$

$$\therefore ab = 0$$

19. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$

$f(c) = b$ 이므로 $k = c$

따라서 $f^{-1}(b) = c$

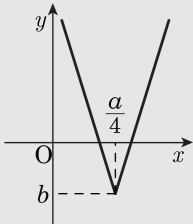
20. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4 \left(x - \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

21. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값은

$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$

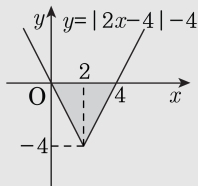
(i) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



22. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는

$x+2y=2$ 의 그래프에서

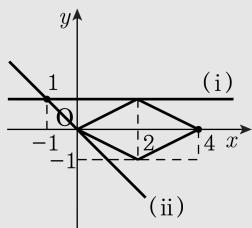
$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한

것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼

평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이

점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

23. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 우함수, $f(-x) = -f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 기함수라 한다. 다음은 「모든 함수는 우함수와 기함수의 합으로 나타낼 수 있다.」라는 명제의 참·거짓을 밝히는 과정이다. 다음 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

보기

임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 라고 놓고 $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 라 하면 $g(x)$ 는 [(가)] 이고 $h(x)$ 는 [(나)] 이다. 따라서 주어진 명제는 [(다)]이다.

① 기함수, 우함수, 참

② 우함수, 기함수, 참

③ 우함수, 우함수, 거짓

④ 기함수, 기함수, 거짓

⑤ 우함수, 기함수, 거짓

해설

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \text{ 이므로}$$

$g(x)$ 는 우함수 ... (가)

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$= -h(x) \text{ 이므로}$$

$h(x)$ 는 기함수 ... (나)

따라서, 임의의 함수 $f(x)$ 를

우함수와 기함수의 합으로 나타내었으므로

주어진 명제는 참이다. ... (다)

24. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 가 성립하는 함수 $f(x)$ 를 기함수라고 한다. 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 기함수일 때, 다음 <보기>의 함수 중 기함수인 것을 모두 고르면?

I. $g(x) \cdot h(x)$

II. $g(x) + h(x)$

III. $g(h(x))$

① I

② II

③ I, III

④ I, III

⑤ I, II, III

해설

$$\begin{aligned} \text{I. } g(-x) \cdot h(-x) &= \{-g(x)\} \cdot \{-h(x)\} \\ &= g(x)h(x) \text{ (우함수)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } g(-x) + h(-x) &= -g(x) - h(x) \\ &= -\{g(x) + h(x)\} \text{ (기함수)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } g(h(-x)) &= g(-h(x)) \\ &= -g(h(x)) \text{ (기함수)} \end{aligned}$$

25. $y = x - [x]$ ($0 \leq x \leq 4$) 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
 ($[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

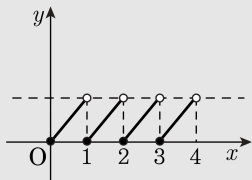
② $2\sqrt{2}$

③ 4

④ $4\sqrt{2}$

⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \leq x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \leq x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \leq x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \leq x < 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.