

1. 집합 $A = \{2, 4, 6, \{4, 6\}\}$ 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 골라라.

- $\textcircled{\tiny \neg}$ $1 \in A$

$\textcircled{\tiny \subset}$ $\{2, 4\} \subset A$

$\textcircled{\tiny \in}$ $\{4\} \in A$

$\textcircled{\tiny \ni}$ $\{4, 6\} \in A$

$\textcircled{\tiny \neq}$ $n(A) = 5$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\textcircled{\tiny \neg}$

▷ 정답 : $\textcircled{\tiny \in}$

▷ 정답 : $\textcircled{\tiny \ni}$

해설

- $\textcircled{\tiny \neg}$ $1 \notin A$
- $\textcircled{\tiny \in}$ $\{4\} \subset A$
- $\textcircled{\tiny \ni}$ $\{4, 6\}$ 은 집합 A 의 하나의 원소이므로 $n(A) = 4$ 이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 두 자리의 } 30\text{의 약수}\}$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?
- ① $\emptyset$ 는 집합 A 의 부분집합이다.
 - ② $\{10, 12, 15\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다.
 - ③ 원소가 하나뿐인 집합 A 의 부분집합은 3개이다.
 - ④ 원소가 3개인 집합 A 의 부분집합은 1개이다.
 - ⑤ 원소가 4개인 집합 A 의 부분집합은 없다.

해설

$A = \{10, 15, 30\}$

② $\{10, 12, 15\} \not\subset A$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 가장 큰 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

A 는 B 의 진부분집합이고,
 $A = \{12, 24, 36, \dots\}$ 이므로
 $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 의 $\square$ 에는 12의 약수 중 12를 제외한 수가 들어가야 한다.
따라서 $\square$ 안에 들어갈 수는 1, 2, 3, 4, 6이고, 가장 큰 자연수는 6이다.

4. 집합 $A = \{1, 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 4 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는
 $2^2 = 4$ (개) 이므로 $n(B) = 4$ 이다.
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는
 $2^{n(B)} = 2^4 = 16$ (개) 이다.

5. 집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ 의 부분집합 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합 전체를 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 이라하고, 집합 A_k 의 원소의 합을 $a_k (k = 1, 2, \dots, 10)$ 이라 할 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

① 104 ② 106 ③ 108 ④ 110 ⑤ 112

해설

U 는 원소가 5개이므로 2개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는 5개의 원소 중에서 2개를 택하는 방법의 수 $(5 \times 4) \div 2 = 10$ 과 같다. 따라서, 각 k 에 대하여 a_k 는 두 원소의 합이므로 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 은 20개의 원소의 합이다. 이 때, 2, 3, 5, 7, 11의 5개의 수가 고르게 포함되므로 5개의 수가 각각 4번씩 더해진다.

따라서, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 4 \times (2 + 3 + 5 + 7 + 11) = 112$

6. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\}$ 일 때, 보기를 만족하는 집합 B 의 개수는?

보기

$$\{4, 8\} \subset B \subset A, n(B) = 4$$

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

집합 B 는 원소 4, 8을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 4개인 집합이므로

$\{4, 8, 12, 16\}, \{4, 8, 12, 20\}, \{4, 8, 16, 20\}$ 의 3개

7. 세 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20\text{미만의 소수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 18\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.
 $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.
먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.
 $B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$
따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

8. 집합 B 와 서로소인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $A - B$

㉡ $A^c \cap B^c$

㉢ $A - (A - B)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

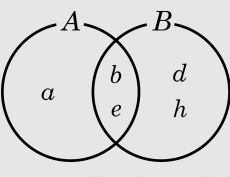
㉠ 집합 A 에서 B 와 공통되는 원소를 모두 제거했기 때문에 $A - B$ 는 B 와 서로소 관계에 있다.

㉡ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로 원소들은 집합 A 와 B 에 공통되는 원소가 없다.
따라서 서로소 관계가 된다.

9. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{a, b, e\}$ 이고, $A \cap B = \{b, e\}$, $A \cup B = \{a, b, d, e, h\}$ 일 때, 집합 B 는?

- ① $\{a, d, e, h\}$
- ② $\{b, d, e, h\}$
- ③ $\{b, e, h\}$
- ④ $\{d, e, h\}$
- ⑤ $\{d, e\}$

해설



$\therefore B = \{b, d, e, h\}$

10. 두 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, e\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8 개

해설

집합 X 는 원소 c 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.

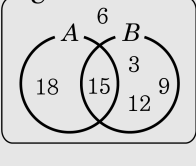
$$n(X) = 2^3 = 8 \text{ (7\H)}$$

11. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B - A = \{3, 9, 12\}$, $A^c \cap B^c = \{6\}$ 일 때, $n(A)$ 는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ 이다.
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A = \{15, 18\}$ 이다.
따라서 $n(A) = 2$ 이다.



12. 두 집합 $A = \{4, 7, a+1, 2a-2\}$, $B = \{3, a+2, b, 9\}$ 에 대하여 $A-B = \{4, 6\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A-B = \{4, 6\}$ 이므로
 $4 \in A, 6 \in A$ 이고 $4 \notin B, 6 \notin B, 7 \in B$
 $a+1=6$ 또는 $2a-2=6$
(i) $a+1=6$ 일 때, $a=5$
 $A = \{4, 6, 7, 8\}, B = \{3, 7, b, 9\}$
 $A-B = \{4, 6\}$ 이려면 $b=8$
(ii) $2a-2=6$ 일 때, $a=4$
 $A = \{4, 5, 6, 7\}, B = \{3, 6, b, 9\}$
 $6 \notin B$ 이어야 하므로 $a \neq 4$
 $\therefore A = \{4, 6, 7, 8\}, B = \{3, 7, 8, 9\}$
 $A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

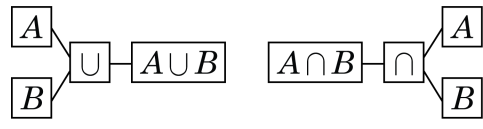
13. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{3, 7\}$ 에 대하여 $B \cup X = X$, $(A - B) \cap X = \{5\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?(단, X 는 U 의 부분집합이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

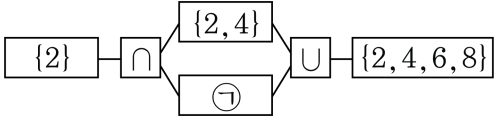
해설

$\{3, 7\} \cup X = X$, $\{1, 5\} \cap X = \{5\}$ 이므로
 $\{3, 7\} \subset X$, $1 \notin X$, $5 \in X$ 이다.
따라서 $\{3, 5, 7\} \subset X \subset \{3, 5, 7, 9\}$ 이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2 = 2(\text{개})$ 이다.

14. 두 집합 A, B 의 합집합과 교집합을 다음 그림과 같이 나타낸다.



아래의 그림에서 집합 $\ominus$ 의 모든 원소들의 합은?



- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 24

해설

집합 $\ominus \cap \{2, 4\} = \{2\}$, 집합 $\ominus \cup \{2, 4\} = \{2, 4, 6, 8\}$ 집합 $\ominus = \{2, 6, 8\}$
따라서 $\ominus$ 의 모든 원소들의 합은 $2 + 6 + 8 = 16$ 이다.

15. 자연수 전체의 집합 N 에서 자연수 k 의 배수의 집합을 N_k 라 할 때, 다음 중 집합 $(N_2 \cup N_4) \cap N_3$ 와 같은 집합은?

① N_2 ② N_6 ③ N_8 ④ N_{12} ⑤ N_{24}

해설

N_2 는 2의 배수의 집합이고, N_4 는 4의 배수의 집합이므로 $N_4 \subset N_2$

$$\therefore N_2 \cup N_4 = N_2$$

또, N_3 은 3의 배수의 집합이므로 $N_2 \cap N_3$ 는 2의 배수이면서 3의 배수의 집합이다.

$$\therefore N_2 \cap N_3 = N_6$$

$$\therefore (N_2 \cup N_4) \cap N_3 = N_2 \cap N_3 = N_6$$

16. 축구를 좋아하는 학생이 21 명, 농구를 좋아하는 학생이 15 명, 축구와 농구를 모두 좋아하는 학생은 9 명, 모두 싫어하는 학생은 6 명이다. 이 때, 축구만 싫어하거나 농구를 좋아하는 학생은 모두 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 21 명

해설

$n(A) = 21, n(B) = 15, n(A \cap B) = 9, n((A \cup B)^c) = 6$ 이다.
 $n(A^c \cup B) = n(B) + n((A \cup B)^c) = 15 + 6 = 21$ 이다.

17. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

- ① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = -3$
- ③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

- ① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
- ⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

18. 다음 명제 중 거짓인 명제는?

- ① 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다.
- ② 두 자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + n^2$ 이 홀수이면 mn 은 홀수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 은 짝수이다.
- ④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 \leq 0$ 이다.
- ⑤ 정사각형은 평행사변형이다.

해설

② (반례) $m = 2, n = 1$ 인 경우

19. 명제 ‘ $|x-3| < a$ 이면 $1 < x < 7$ 이다.’ 가 참이 되기 위한 양수 a 의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$-a < x-3 < a \Rightarrow 3-a < x < 3+a$$

$$\{x|3-a < x < 3+a\} \subset \{x|1 < x < 7\}$$

$\therefore 1 \leq 3-a$ 과 $3+a \leq 7$ 을 동시에 만족해야 한다.

$$\therefore a \leq 2$$

20. 명제 ' $2x^2 + ax - 9 \neq 0$ 이면 $x - 3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

대우인 ' $x - 3 = 0$ 이면 $2x^2 + ax - 9 = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$2 \cdot 3^2 + 3a - 9 = 0, 3a + 9 = 0$$

$$\therefore a = -3$$

21. 네 개의 조건 p, q, r, s 에 대하여 $q \Rightarrow \sim s, \sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$ 라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

- ① $p \Rightarrow q$
- ② $p \Rightarrow \sim r$
- ③ $r \Rightarrow q$
- ④ $r \Rightarrow s$
- ⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$$
$$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$$
$$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$$

22. 다음 [보기] 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건이 아닌 것은?

보기

- ㉠ $p : x^2 + y^2 = 0, q : xy = 0$
- ㉡ $p : x^2 = 16, q : x = 4$
- ㉢ $p : x, y$ 는 유리수, $q : x + y, xy$ 는 유리수

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

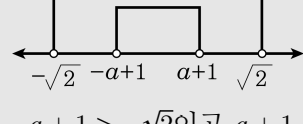
- ㉠ $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$
 $xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 ‘충분조건’
- ㉡ $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$
 $Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 ‘필요조건’
- ㉢ x, y 는 유리수 $\rightarrow x + y, xy$ 는 유리수,
 p 는 q 이기 위한 ‘충분조건’
반례 : $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$
 $\rightarrow x + y = 2, xy = -1$

23. 두 조건 $p : |x^2 - 1| < 1$, $q : |x - 1| < a$ 에 대하여 p 가 q 의 필요조건이 되도록 하는 a 의 최댓값은?

- ① $2 - \sqrt{2}$ ② $\sqrt{2} - 1$ ③ $\sqrt{2} + 1$
 ④ $\sqrt{2} + 2$ ⑤ $\sqrt{3} - 1$

해설

$p : |x^2 - 1| < 1$ 를 만족하는 해를 구하면
 $-1 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
 $\therefore P = \{x \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$
 $q : |x - 1| < a$ 를 만족하는 해를 구하면
 $-a < x - 1 < a \Leftrightarrow -a + 1 < x < a + 1$
 $\therefore Q = \{x \mid -a + 1 < x < a + 1\}$
 p 가 q 의 필요조건이 되려면 $q \Rightarrow p$
 즉 $Q \subset P$ 가 되어야 한다. 수직선을 그려보면



$-a + 1 \geq -\sqrt{2}$ 이고, $a + 1 \leq \sqrt{2}$, 이를 각각 풀면
 $a \leq \sqrt{2} + 1$ 이고 $a \leq \sqrt{2} - 1$ 이고 동시에 만족하는 a 의 범위는
 $a \leq \sqrt{2} - 1$
 $\therefore a$ 의 최댓값은 $\sqrt{2} - 1$

24. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

- ① $A = B$
- ② $B \subset A$
- ③ $A \subset B$
- ④ $A \cap B = \emptyset$
- ⑤ $A^C = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.

그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.

따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

25. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 13

② 24

③ 25

④ 28

⑤ 36

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b) \cdot \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right) \geq 12 + 13 = 25$$