

1. 집합 $A = \{2, 4, 6, \{4, 6\}\}$ 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 골라라.

㉠ $1 \in A$

㉡ $\{2, 4\} \subset A$

㉢ $\{4\} \in A$

㉣ $\{4, 6\} \in A$

㉤ $n(A) = 5$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

㉠ $1 \notin A$

㉢ $\{4\} \subset A$

㉣ $\{4, 6\}$ 은 집합 A 의 하나의 원소이므로
 $n(A) = 4$ 이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 두 자리의 } 30 \text{의 약수}\}$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset$ 는 집합 A 의 부분집합이다.

② $\{10, 12, 15\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다.

③ 원소가 하나뿐인 집합 A 의 부분집합은 3개이다.

④ 원소가 3개인 집합 A 의 부분집합은 1개이다.

⑤ 원소가 4개인 집합 A 의 부분집합은 없다.

해설

$$A = \{10, 15, 30\}$$

$$\textcircled{2} \{10, 12, 15\} \not\subset A$$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 가장 큰 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

A 는 B 의 진부분집합이고,

$A = \{12, 24, 36, \dots\}$ 이므로

$B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 의 $\square$ 에는 12의 약수 중 12를 제외한 수가 들어가야 한다.

따라서 $\square$ 안에 들어갈 수는 1, 2, 3, 4, 6이고, 가장 큰 자연수는 6이다.

4. 집합 $A = \{1, 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는
 $2^2 = 4$ (개)이므로 $n(B) = 4$ 이다.
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는
 $2^{n(B)} = 2^4 = 16$ (개)이다.

5. 집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ 의 부분집합 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합 전체를 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 이라하고, 집합 A_k 의 원소의 합을 $a_k (k = 1, 2, \dots, 10)$ 이라 할 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

① 104

② 106

③ 108

④ 110

⑤ 112

해설

U 는 원소가 5개이므로 2개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는 5개의 원소 중에서 2개를 택하는 방법의 수 $(5 \times 4) \div 2 = 10$ 과 같다. 따라서, 각 k 에 대하여 a_k 는 두 원소의 합이므로 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 은 20개의 원소의 합이다. 이 때, 2, 3, 5, 7, 11의 5개의 수가 고르게 포함되므로 5개의 수가 각각 4번씩 더해진다.

따라서, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 4 \times (2 + 3 + 5 + 7 + 11) = 112$

6. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\}$ 일 때, 보기를 만족하는 집합 B 의 개수는?

보기

$$\{4, 8\} \subset B \subset A, n(B) = 4$$

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

집합 B 는 원소 4, 8 을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 집합이므로

$\{4, 8, 12, 16\}, \{4, 8, 12, 20\}, \{4, 8, 16, 20\}$ 의 3 개

7. 세 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 20미만의 소수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 18의 약수}\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.

먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.

$$B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

8. 집합 B 와 서로소인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $A - B$

㉡ $A^c \cap B^c$

㉢ $A - (A - B)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 집합 A 에서 B 와 공통되는 원소를 모두 제거했기 때문에 $A - B$ 는 B 와 서로소 관계에 있다.

㉡ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로 원소들은 집합 A 와 B 에 공통되는 원소가 없다.

따라서 서로소 관계가 된다.

9. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{a, b, e\}$ 이고, $A \cap B = \{b, e\}$, $A \cup B = \{a, b, d, e, h\}$ 일 때, 집합 B 는?

① $\{a, d, e, h\}$

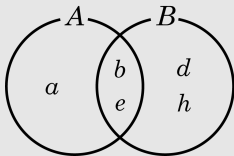
② $\{b, d, e, h\}$

③ $\{b, e, h\}$

④ $\{d, e, h\}$

⑤ $\{d, e\}$

해설



$\therefore B = \{b, d, e, h\}$

10. 두 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, e\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 X 는 원소 c 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.

$$n(X) = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

11. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B - A = \{3, 9, 12\}$, $A^c \cap B^c = \{6\}$ 일 때, $n(A)$ 는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

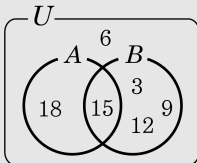
⑤ 5

해설

$U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ 이다.

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A = \{15, 18\}$ 이다.

따라서 $n(A) = 2$ 이다.



12. 두 집합 $A = \{4, 7, a + 1, 2a - 2\}$, $B = \{3, a + 2, b, 9\}$ 에 대하여 $A - B = \{4, 6\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A - B = \{4, 6\}$ 이므로

$4 \in A$, $6 \in A$ 이고 $4 \notin B$, $6 \notin B$, $7 \in B$

$a + 1 = 6$ 또는 $2a - 2 = 6$

(i) $a + 1 = 6$ 일 때, $a = 5$

$A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, b, 9\}$

$A - B = \{4, 6\}$ 이려면 $b = 8$

(ii) $2a - 2 = 6$ 일 때, $a = 4$

$A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 6, b, 9\}$

$6 \notin B$ 이어야 하므로 $a \neq 4$

$\therefore A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

13. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 5, 7\}, B = \{3, 7\}$ 에 대하여 $B \cup X = X, (A - B) \cap X = \{5\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?(단, X 는 U 의 부분집합이다.)

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

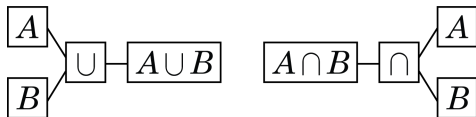
$\{3, 7\} \cup X = X, \{1, 5\} \cap X = \{5\}$ 이므로

$\{3, 7\} \subset X, 1 \notin X, 5 \in X$ 이다.

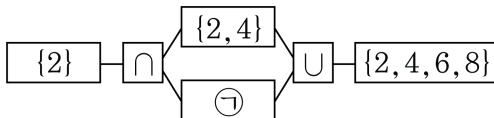
따라서 $\{3, 5, 7\} \subset X \subset \{3, 5, 7, 9\}$ 이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2 = 2(\text{개})$ 이다.

14. 두 집합 A, B 의 합집합과 교집합을 다음 그림과 같이 나타낸다.



아래의 그림에서 집합 $\ominus$ 의 모든 원소들의 합은?



① 14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 24

해설

집합 $\ominus \cap \{2, 4\} = \{2\}$, 집합 $\ominus \cup \{2, 4\} = \{2, 4, 6, 8\}$ 집합 $\ominus = \{2, 6, 8\}$

따라서 $\ominus$ 의 모든 원소들의 합은 $2 + 6 + 8 = 16$ 이다.

15. 자연수 전체의 집합 N 에서 자연수 k 의 배수의 집합을 N_k 라 할 때, 다음 중 집합 $(N_2 \cup N_4) \cap N_3$ 와 같은 집합은?

① N_2

② N_6

③ N_8

④ N_{12}

⑤ N_{24}

해설

N_2 는 2의 배수의 집합이고, N_4 는 4의 배수의 집합이므로 $N_4 \subset N_2$

$$\therefore N_2 \cup N_4 = N_2$$

또, N_3 은 3의 배수의 집합이므로 $N_2 \cap N_3$ 는 2의 배수이면서 3의 배수의 집합이다.

$$\therefore N_2 \cap N_3 = N_6$$

$$\therefore (N_2 \cup N_4) \cap N_3 = N_2 \cap N_3 = N_6$$

16. 축구를 좋아하는 학생이 21 명, 농구를 좋아하는 학생이 15 명, 축구와 농구를 모두 좋아하는 학생은 9 명, 모두 싫어하는 학생은 6 명이다. 이 때, 축구만 싫어하거나 농구를 좋아하는 학생은 모두 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 21 명

해설

$n(A) = 21, n(B) = 15, n(A \cap B) = 9, n((A \cup B)^c) = 6$ 이다.

$n(A^c \cup B) = n(B) + n((A \cup B)^c) = 15 + 6 = 21$ 이다.

17. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.

③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.

⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

18. 다음 명제 중 거짓인 명제는?

- ① 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다.
- ② 두 자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + n^2$ 이 홀수이면 mn 은 홀수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 은 짝수이다.
- ④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 \leq 0$ 이다.
- ⑤ 정사각형은 평행사변형이다.

해설

② (반례) $m = 2, n = 1$ 인 경우

19. 명제 ' $|x - 3| < a$ 이면 $1 < x < 7$ 이다.'가 참이 되기 위한 양수 a 의 최댓값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$-a < x - 3 < a \Rightarrow 3 - a < x < 3 + a$$

$$\{x | 3 - a < x < 3 + a\} \subset \{x | 1 < x < 7\}$$

$\therefore 1 \leq 3 - a$ 과 $3 + a \leq 7$ 을 동시에 만족해야 한다.

$$\therefore a \leq 2$$

20. 명제 ' $2x^2 + ax - 9 \neq 0$ 이면 $x - 3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

①

-3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

대우인 ' $x - 3 = 0$ 이면 $2x^2 + ax - 9 = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$2 \cdot 3^2 + 3a - 9 = 0, 3a + 9 = 0$$

$$\therefore a = -3$$

21. 네 개의 조건 p, q, r, s 에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$ 라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$

② $p \Rightarrow \sim r$

③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$

⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$$

$$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$$

$$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$$

22. 다음 [보기] 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건이 아닌 것은?

보기

㉠ $p : x^2 + y^2 = 0, q : xy = 0$

㉡ $p : x^2 = 16, q : x = 4$

㉢ $p : x, y$ 는 유리수, $q : x + y, xy$ 는 유리수

① ㉠

② ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$

$xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$

$P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 ‘충분조건’

㉡ $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

$Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 ‘필요조건’

㉢ x, y 는 유리수 $\rightarrow x + y, xy$ 는 유리수,

p 는 q 이기 위한 ‘충분조건’

반례: $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$

$\rightarrow x + y = 2, xy = -1$

23. 두 조건 $p: |x^2 - 1| < 1$, $q: |x - 1| < a$ 에 대하여 p 가 q 의 필요조건이 되도록 하는 a 의 최댓값은?

① $2 - \sqrt{2}$

② $\sqrt{2} - 1$

③ $\sqrt{2} + 1$

④ $\sqrt{2} + 2$

⑤ $\sqrt{3} - 1$

해설

$p: |x^2 - 1| < 1$ 를 만족하는 해를 구하면

$$-1 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$\therefore P = \{x \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

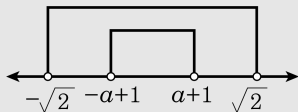
$q: |x - 1| < a$ 를 만족하는 해를 구하면

$$-a < x - 1 < a \Leftrightarrow -a + 1 < x < a + 1$$

$$\therefore Q = \{x \mid -a + 1 < x < a + 1\}$$

p 가 q 의 필요조건이 되려면 $q \Rightarrow p$

즉 $Q \subset P$ 가 되어야 한다. 수직선을 그려보면



$-a + 1 \geq -\sqrt{2}$ 이고, $a + 1 \leq \sqrt{2}$, 이를 각각 풀면

$a \leq \sqrt{2} + 1$ 이고 $a \leq \sqrt{2} - 1$ 이고 동시에 만족하는 a 의 범위는 $a \leq \sqrt{2} - 1$

$\therefore a$ 의 최댓값은 $\sqrt{2} - 1$

24. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A = B$

② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A^c = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.

그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.

따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

25. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 13

② 24

③ 25

④ 28

⑤ 36

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b) \cdot \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b} \right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b} \right) \geq 12 + 13 = 25$$