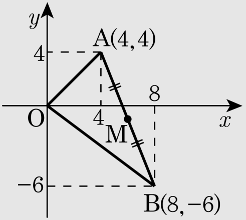
1. $O(0,0)$, $A(4,4)$, $B(8,-6)$에서 원점을 지나고 $\triangle OAB$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{1}{6}x$ ② $y=-\frac{1}{5}x$ ③ $y=-\frac{1}{4}x$
④ $y=-\frac{1}{3}x$ ⑤ $y=-\frac{1}{2}x$

해설

구하고자 하는 직선은 원점과 $\overline{AB}$의 중점 $M(6,\ -1)$을 지나므로



$$y-0=\frac{-1-0}{6-0}(x-0)$$

$\therefore\ y=-\frac{1}{6}x$

2. 두 직선 $3x+4y+4=0,\ 3x+4y+2=0$ 사이의 거리는 얼마인가?

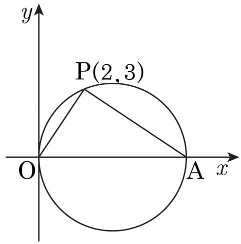
① $\frac{2}{5}$　② $\frac{1}{3}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$3x+4y+4=0$ 의 임의의 한 점을 잡는다.
$(0,-1)$ 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하면

$$\therefore\ \frac{|3\cdot 0+4\cdot(-1)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$$

3. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a - 2)^2 + 3^2$
$a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

반원의 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle \mathrm{OPA} = 90°$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라 하면
$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1,\ 2a - 4 = 9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

4. 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(2,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a,b)$라 할 때, a^2-b^2을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$으로부터

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\ a+b=1\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$으로부터

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b+2)^2,\ a-b=2\cdots$ ㉡

㉠, ㉡로 부터 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\times2=2$

5. $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=x$이고, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{BM}}=7$, $\overline{\mathrm{AM}}=1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$이므로

$8^2+x^2=2(7^2+1^2)$

$\therefore\ x=\pm 6$

$x>0$이므로 $x=6$

6. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$와 $(4,0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$과 $(4,10)$을 연결하는 직선과 $y=4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

7. 두 점 A$(2,\ -2)$, B$(1,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $(1+t)\ :\ t$로 외분하는 점이 제2사분면에 속할 때, t의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $t > 1$

해설

선분 AB를 $(1+t)\ :\ t$로 외분하는 점을 Q라 하면

$$Q\left(\frac{(1+t)\cdot 1 - t\cdot 2}{(1+t)-t},\ \frac{(1+t)\cdot 3 - t\cdot(-2)}{(1+t)-t}\right)$$

즉, $Q(1-t,\ 3+5t)$ 이때, 점 Q가 제2사분면에 속하므로

$1-t < 0,\ 3+5t > 0$

따라서 $t > 1$

8. 평행사변형 ABCD 의 두 대각선의 교점을 M 이라하자. 두 점 A, C 의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-2,6), \mathrm{C}(4,0)$ 이고, 삼각형 MBC 의 무게중심은 원점이다. 점 D 의 좌표를 (a,b) 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 M은 선분 AC의 중점이므로

M의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{6+0}{2}\right) = (1,3)$.

삼각형 MBC의 무게중심은 원점이므로

점 B의 좌표를 (c,d) 라고 하면

$\dfrac{1+c+4}{3} = 0$ 에서 $c = -5$

$\dfrac{3+d+0}{3} = 0$ 에서 $d = -3$

따라서 점 B의 좌표는 $(-5,-3)$ 이다. 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$\dfrac{-5+a}{2} = 1$ 에서 $a = 7$

$\dfrac{-3+b}{2} = 3$ 에서 $b = 9$

$\therefore a+b = 16$

9. 두 직선 $y=ax$와 $y=bx$가 서로 수직이고, 직선 $x=2$와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$이다. 이때, $|a-b|$의 값은? (단, $a>0,\ b<0$)

① 1 ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

$\mathrm{P}(2, 2a),\quad \mathrm{Q}(2, 2b)$

$\therefore$ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right)=\left(2, \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow\ a+b=\frac{3}{2}\ \cdots$ ㉠

$y=ax$와 $y=bx$가 서로 수직이므로

$a\times b=-1\ \cdots$ ㉡

$\therefore\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$이므로

$(a-b)^2=\frac{9}{4}+4$

$\Rightarrow\ a-b=\frac{5}{2}\ (\because\ a>0,\ b<0)$

10. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ \ x+3y+k=0,\ \ 2x-y+3=0$$

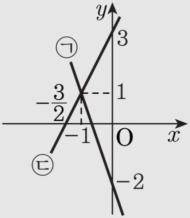
① $k \neq -2$ ② $k \neq -3$ ③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$ ⑤ $k \neq -11$

해설

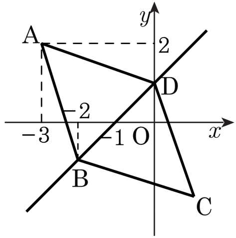
$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.
㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.



㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$, $\therefore\ k \neq -2$

11. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD 의 중점은 $M(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1,

점 B 와 점 D 의 y값을 $a,\ b$라 하면

$b-a=2,\ \dfrac{a+b}{2}=0$ 이므로 $a=-1,\ b=1$ 이다.

$\therefore\ D(0,\ 1)$

$\overline{AM}=2\sqrt{2},\ \overline{MD}=\sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD 의 넓이는

$4\left(\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=8$

12. 원점 O 와 점 $A(10,0)$ 으로부터 직선$3x+4y+30=0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

① 64　② 72　③ 80　④ 81　⑤ 90

해설

$$\overline{OP} = \frac{|\,30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$$

$$\overline{AQ} = \frac{|\,30+30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 12$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2}\cdot(\overline{OP}+\overline{AQ})\cdot\overline{PQ} = \frac{1}{2}\cdot(6+12)\cdot 8 = 72$$

13. 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y - 2x - 3 = 0$ ($y = x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore \ a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore \ a = 5$

14. 두 점 $\mathrm{A}(-3,6)$, $\mathrm{B}(8,-1)$와 직선 $x+y+1=0$이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\mathrm{A}(-3,6)$ 의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(a,b)$라 하면

$\dfrac{a-3}{2}+\dfrac{b+6}{2}+1=0,\ a+b=-5 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AA}'}\perp l$이므로, $\overline{\mathrm{AA}'}$의 기울기는 1이다.

$\dfrac{b-6}{a+3}=1,\ a-b=-9 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ : $2a=-14,\ a=-7,\ b=2$

$\therefore\ \mathrm{A}'(-7,2)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{BP}}\le\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$이고,

이 때 점 P는 A′, B 와 일직선상에 있으므로,

$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$의 기울기는 $\overline{\mathrm{BP}}$의 기울기와 같다.

$\mathrm{A}'(-7,2)$, $\mathrm{B}(8,-1)$, $\mathrm{P}(m,n)$에서

$\dfrac{-1-2}{8-(-7)}=\dfrac{n+1}{m-8}$,

$m+5n=3 \cdots$ ㉢

점 P는 직선 l위에 있으므로, $m+n=-1 \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $m=-2,\ n=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(-2,1)$

15. 두 점 $A(1, 3)$, $B(4, m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$ 이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0)$

16. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 3), B(1, 3)이 있다. 점 A에서 x축 위의 점과 y축 위의 점을 각각 지나 점 B에 이르는 최단 거리는?

① 5 ② 7 ③ $\sqrt{53}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{75}$

해설

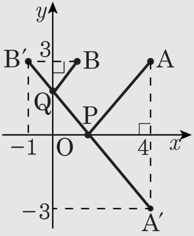
점 A의 x축에 대한 대칭점을 A′, 점 B의 y축에 대한 대칭점을 B′

두 점 A′, B′을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면

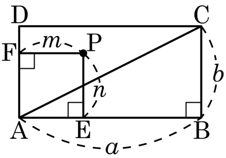
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{B'Q}}$

주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 A′(4, −3), B′(−1, 3) 사이의 거리이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{(4+1)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{61}$



17. $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ 인 직사각형 ABCD 에서 그림과 같이 삼각형 ACD 의 내부에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 변 AB, AD 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하자. $\overline{PE} = n$, $\overline{PF} = m$ 일 때,<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

ㄱ $\dfrac{n}{m} < \dfrac{b}{a}$ ㄴ $\dfrac{n}{m} < \dfrac{b-m}{a-m}$ ㄷ $\dfrac{b-m}{a-m} < \dfrac{b}{a}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

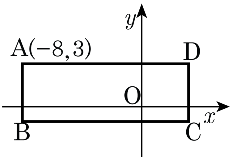
$\dfrac{n}{m}$ 은 직선 AP 의 기울기,

$\dfrac{b}{a}$ 는 직선 AC 의 기울기,

$\dfrac{b-n}{a-m}$ 은 직선 PC 의 기울기이다.

따라서 $\dfrac{b-n}{a-m} < \dfrac{b}{a} < \dfrac{n}{m}$

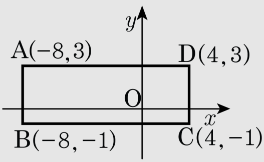
18. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 A$(-8,\ 3)$, B, C, D를 꼭지점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이는 32이고, 가로의 길이는 세로 길이의 세 배일 때, 점 B 와 D 를 지나는 직선의 방정식은? (단, 각 변은 축에 평행하다.)



① $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$ ② $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ ③ $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

④ $y = \frac{1}{4}x + \frac{4}{3}$ ⑤ $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{3}$

해설



세로의 길이가 a라 하면 가로의 길이는 $3a$이다.

$8a = 32$에서 $a = 4$

가로의 길이는 12, 세로의 길이는 4이므로

D$(4, 3)$이고, 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{3}(x-4)+3$

따라서 $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

19. 좌표평면 위에서 $x^2+2xy+2y^2-4x-ky+5=0$이 두 개의 직선을 나타낼 수 있도록 하는 k의 값을 구하면? (단, $k<5$)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

x에 관해서 정리하면, $x^2+2(y-2)x+2y^2-ky-5=0 \cdots$ ㉠

㉠이 두 일차식의 곱으로 나타내어지므로

$D/4=(y-2)^2-(2y^2-ky+5)$

$=-y^2+(k-4)y-1$이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\therefore D=(k-4)^2-4=0$에서 $k=2$

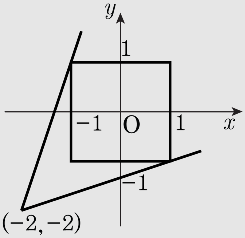
20. $|x+y|+|x-y|=2$, $kx-y+2k-2=0$을 동시에 만족하는 실수 x, y가 존재할 때, 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면, $M+m$의 값은?

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ 5

해설

$|x+y|+|x-y|=2$ 을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다. 한편, $kx-y+2k-2=0$ 은 k 에 관하여 정리하면

$k(x+2)-(y+2)=0$ 이므로 k 의 값에 관계없이 항상 $(-2,-2)$ 를 지나는 직선이다.



두 도형을 동시에 만족하는 실수 x, y 가 존재해야 하므로 두 그래프가 만나야 한다.

따라서 k 는 이 직선의 기울기 이므로

직선이 점$(-1,1)$ 을 지날 때, k 는 최대이고

점 $(1,-1)$ 을 지날 때 k 는 최소이다.

$$M=3,\ m=\frac{1}{3}$$

$$\therefore M+m=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

21. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y+2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최댓값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x-y+2+k(x+y)=0$ 을 정리하면

$(1+k)x+(k-1)y+2=0$

원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k)=\frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2+(k-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2+2}$ 가 최소일 때,

즉 $k=0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의

최대값은 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

22. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0, 5)$ 와 $\mathrm{B}(8, 1)$ 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$

이 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{B}(8,\ 1)$ 을 지나므로

$a^2 - 10b + 25 = 0,\ a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$

두 식을 연립하면

$4a^2 - 80a + 300 = 0,\ 4(a-5)(a-15) = 0$

그런데

$0 \le a \le 8$ 이므로 $a = 5,\ b = 5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$\therefore\ x + 2y - 10 = 0$

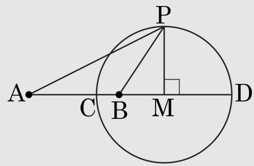
따라서 원의 중심 $(5,\ 5)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

23. 두 점 $A(1,1)$, $B(7,4)$ 에서 이르는 거리의 비가 $2:1$ 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan(\angle PAB)$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설



점 P 의 자취는 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점 C와 $2:1$ 로 외분하는 점 D 를
지름의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1}\right)$, 즉 $C(5,3)$

점 D 의 좌표는

$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1}\right)$ 즉, $D(13,7)$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$

즉, $M(9,5)$ 이므로

$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2+(5-3)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가 $(9,5)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$(x-9)^2+(y-5)^2=20$

그런데 다음 그림에서 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대인 경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

이 때, $\overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2+(5-1)^2} = 4\sqrt{5}$,

$\overline{PM} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\tan(\angle PAB) = \tan(\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

24. 두 점 $A(-8,\ -2)$, $B(2,\ 8)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=27$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, △ABC 의 무게 중심 G 는 어떻게 움직이는가?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
② $(x+1)^2+(y-1)^2=2$
③ $(x+2)^2+(y+1)^2=2$
④ $(x+2)^2+(y-2)^2=3$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

해설

$P(a,\ b)$ $a^2+b^2=27$

무게중심 $G(x,y)=\left(\dfrac{-8+2+a}{3},\ \dfrac{-2+8+b}{3}\right)$

$$=\left(\frac{a-6}{3},\ \frac{b+6}{3}\right)$$

$X=\dfrac{a-6}{3},\ Y=\dfrac{b+6}{3}$

$a=3X+6,\ b=3Y-6$ $a^2+b^2=27$ 에 대입하면,

$(3X+6)^2+(3Y-6)^2=27$

$\therefore\ (X+2)^2+(Y-2)^2=3$

따라서 $G(X,\ Y)$ 의 자취는 $(x+2)^2+(y-2)^2=3$

25. 두 원 $x^2+y^2-2x+2my+m^2-7=0$, $x^2+y^2-2mx+2y+m^2-9=0$가 직교할 때 m값을 구하면?

① $-4,\ 2$ ② $-4, -2$ ③ $4, -2$

④ $2,\ \sqrt{2}$ ⑤ $-2,\ \sqrt{2}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$(x-1)^2+(y+m)^2=8$

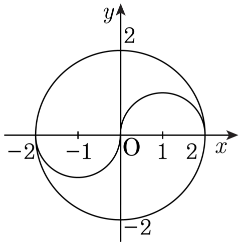
$(x-m)^2+(y+1)^2=10$

두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로

$(m-1)^2+(m-1)^2=18$, $(m-1)^2=9$, $m-1=\pm 3$

$m=4, -2$

26. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x-1)$ 이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?



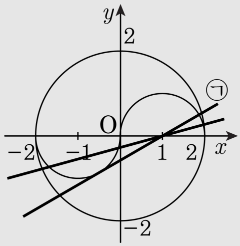
① $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$　② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $0 < a < \frac{2}{3}$　④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$

⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x-1)$ 의 그래프는 실수 a 의 값에
관계없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1, 0)$ 과 직선 $y = a(x-1)$,
즉 $ax - y - a = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

27. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x+\sqrt{3}y=1$ ② $\sqrt{3}x+y=1$ ③ $x-\sqrt{3}y=-1$

④ $\sqrt{3}x-y=-3$ ⑤ $x+y=2$

해설

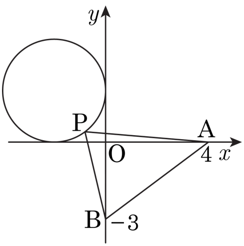
원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기
위해서는 중심 $(1,0)$을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
$y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심$(-1,0)$에서 이 직선에 이르는 거리가
반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,
$x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$

28. 다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 위를 움직이는 점 P 와 두 점 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ -3)$ 으로 이루어지는 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값과 최댓값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 구하시오.

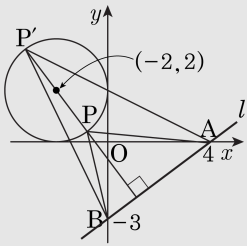


▶ **답 :**

▷ **정답 :** 26

해설

원 위의 한 점 P′ 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선 직선 l 에 이르는 거리가 최대일 때 $\triangle ABP'$ 의 높이는 최대가 되고 넓이도 최대이다.
마찬가지로 원 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선
직선 l 에 이르는 거리가 최소일 때 $\triangle ABP$ 의
높이는 최소가 되고 넓이도 최소이다.



원의 중심 $(-2,\ 2)$ 에서 A, B 를 지나는 직선
$l : 3x-4y-12=0$ 에 이르는 거리는

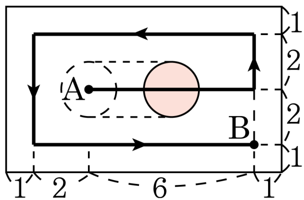
$$d=\frac{|-6-8-12|}{5}=\frac{26}{5}$$

$d+r$ 일 때 최대거리, $d-r$ 일 때 최소거리

$$\begin{cases} M=\left(\dfrac{26}{5}+2\right)\times\overline{AB}\times\dfrac{1}{2}=18 \quad (\because\ \overline{AB}=5) \\ m=\left(\dfrac{26}{5}-2\right)\times\overline{AB}\times\dfrac{1}{2}=8 \end{cases}$$

$\therefore\ M+m=26$

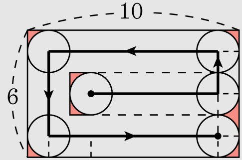
29. 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 6 인 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1 인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A 부터 B 까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는? (단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.)



① 0　　② $10-\frac{5}{2}\pi$　　③ $8-2\pi$
④ $6-\frac{3}{2}\pi$　　⑤ $4-\pi$

해설

반지름의 길이가 1 인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 다음 그림에서 어두운 부분이다.
따라서 그 넓이는 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 반지름의 길이가 1 인 원을 제외한 부분의 넓이의 2 배와 같다.
즉 $2(4-\pi)$



30. 좌표평면 위의 점 P$(x,\ y)$ 는 다음의 조건에 따라 이동한다.

㉠ $x > y$ 이면 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동 한다.
㉡ $x \le y$ 이면 x 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한다.

처음 점 P 의 좌표가 $(1,\ 0)$ 일 때, 점 P 가 이동을 시작하여 100 번째 도착하는 점의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 65　② 66　③ 67　④ 68　⑤ 69

해설

조건에 따라 이동시켜보면,

$(1,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (2,1)$

$\rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow \cdots$

$\therefore\ 3n-1$ 번째에 (n,n) 에 도착한다.

$\Rightarrow\ (3\times 33)-1 = 98$ 번째에 $(33,\ 33)$ 에 도착한다.

$\therefore$ 100 번째는 $(33,\ 34)$

$\Rightarrow\ (a,b) = (33,34)$

$a+b = 67$