1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

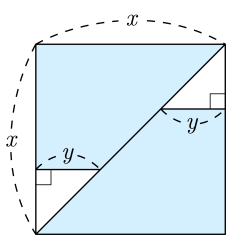
2. 다항식 x^3-3x-3을 다항식 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫이 $ax+b$이고, 나머지가 $cx+d$이었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3-3x-3=(x^2-2x-1)(ax+b)+cx+d$
에서 계수를 비교하면
$a=1,\ -b+d=-3,\ -a-2b+c=-3,\ b-2a=0$
에서 $a=1,\ b=2,\ d=-1,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c+d=1+2+(-1)+2=4$

3. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy - y^2$ ② $x^2 - y^2$ ③ $x^2 - y$

④ $\frac{xy - y^2}{2}$ ⑤ $\frac{x - y}{2}$

해설

$x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$

4. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$　② $-2\sqrt{3}$　③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ &= 9+18=27\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c=\pm 3\sqrt{3}$

5. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x+2$ 로도 나누어떨어지고, $x-1$ 로도 나누어떨어질 때, $\dfrac{q}{p}$ 의 값은?

① 9 ② 4 ③ -9 ④ -3 ⑤ -12

해설

$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$
$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$
$p = -3,\ q = -12,\ \dfrac{q}{p} = \dfrac{-12}{-3} = 4$

6. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, a, b, c를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $-1,\ 1,\ 2$　③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$　⑤ $-1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} x^2-2x-y^2+2y &= (x+y)(x-y)-2(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-2) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

7. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

8. 두 다항식 $x^3+1,\ x^3+2x^2-5x-6$ 의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$
따라서 최대공약수는 $x+1$

9. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0$, $g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1\ \therefore\ a+b=2$

10. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

11. x의 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 -3이 남고, $x+3$으로 나누면 27이 남는다. 이 $f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눌 때, 그 나머지는?

① $6x-9$　② $-6x+9$　③ $2x+3$
④ $-2x-3$　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$
문제의 조건으로부터
$f(2)=-3,\ f(-3)=27$이므로
$2a+b=-3,\ -3a+b=27$
$\therefore\ a=-6,\ b=9$
따라서 구하는 나머지는 $-6x+9$이다.

12. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

13. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지가 $4x+3$일 때 $f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① -1　② 0　③ 3　④ 7　⑤ 11

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$

$x=2$를 대입하면 $f(2)=11$

$f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 R이라 하면

$f(2x)=(x-1)Q'(x)+R$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=R$

$\therefore R=11$

14. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

1	1	a	b	c
		d	e	f
	1	g	h	i

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	b	c
		1	$a+1$	$a+b+1$
	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

15. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 값을 정하면?

① $a = 3\ b = 7\ ,\ c = -4\ ,\ d = 4$

② $a = 3\ b = 9\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

③ $a = 2\ b = 9\ ,\ c = 6\ ,\ d = 4$

④ $a = 1\ b = 3\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

⑤ $a = 2\ b = -9\ ,\ c = 6\ ,\ d = 4$

해설

1	3	0	−1	2	
		3	3	2	
1	3	3	2	4	← d
		3	6		
1	3	6	8	←	c
		3			
	3	9	← b		
	↑				
	a				

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로
$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$
$\therefore\ 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$
$\therefore\ a = 3\ ,\ b = 9\ ,\ c = 8\ ,\ d = 4$

(ii) x 대신 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면,
$x = 0$ 대입 : $2 = -a + b - c + d \cdots ①$
$x = -1$ 대입 : $0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots ②$
$x = 1$ 대입 : $4 = d\ \cdots\cdots ③$
$x = 2$ 대입 : $24 = a + b + c + d \cdots ④$
①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,
$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

16. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

17. 다음 중 $x^4-4x^3-7x^2+34x-24$를 인수분해 하였을 때, 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x+3$ ④ $x+4$ ⑤ $x-4$

해설

$f(x)=x^4-4x^3-7x^2+34x-24$라 하면
$f(1)=f(2)=0$이므로
$f(x)$는 $x-1, x-2$를 인수로 갖는다.
조립제법을 해 보면 즉,
$x^4-4x^3-7x^2+34x-24$
$=(x-1)(x-2)(x^2-x-12)$
$=(x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$

18. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형
③ 정삼각형　④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$
$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
a, b, c는 실수이므로
$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$
$\therefore\ a=b=c$
따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

19. 다음 식을 인수분해하면 $x^4-3x^2y^2+4y^4=(x^2+axy+by^2)(x^2+cxy+dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. (a,b,c,d는 정수)

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4+4x^2y^2+4y^4-7x^2y^2\\ &= (x^2+2y^2)^2-7x^2y^2\\ &= (x^2+\sqrt{7}xy+2y^2)(x^2-\sqrt{7}xy+2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c+d=4$

20. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
$\therefore a=2, b=3, c=-2$
$\therefore\ a+b+c=3$

21. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 5x - 3$이고 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x - 3$

해설

두 다항식을 A, B라고 하면
$A + B = (a + b)G$, $L = abG$,
즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$
$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$
$\therefore\ G = x - 3$

22. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 을
$xy+yz+zx=1$ 을 이용하여 변형하면
$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$
$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$
$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$
$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$
$=1-1+2\cdot 4-4$
$=4$
※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.
$(x-a)(x-b)(x-c)$
$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

23. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

24. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

25. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{100}-1 = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$이다. $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots$㉠

$x=2$를 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots$㉡

㉠ + ㉡: $2(a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$

$\therefore\ a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$

$\therefore\ m=99,\ k=-1$이므로 $m+k=98$

26. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x),\ R$　② $3Q(x),\ R$　③ $Q(x),\ 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x),\ R$　⑤ $Q(x),\ \frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지 : R

27. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개　② 40 개　③ 60 개
④ 80 개　⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면
$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$
$= 5(29 + 1)^3$
$= 5 \cdot 30^3$
$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$
$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$
따라서 N의 양의 약수의 개수는
$(3 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 80$

28. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면

$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^3+1=0$ $\therefore\ a^3=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$

$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

29. x의 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 u, v에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가 성립할 때, $f(3)$의 값은? (단, $f(1) = 1$이라고 한다.)

① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가
u, v에 대한 항등식이므로
$u = 1$, $v = 0$일 때도 이 등식이 성립한다.
$\therefore\ f(1)f(0) = f(1) + f(1)$
$f(1) = 1$이므로 $f(0) = 2$
또, $u = v = 1$일 때는
$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore\ f(2) = -1$
$\therefore\ f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)$
$= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1$
$= -2$

30. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$
$f(1) = 1 + a + b = 0$
$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$
$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$
$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$
$= (x-1)^2 Q(x)$
$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$
$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0\ \ \therefore\ a = -4$
$b = -(a+1)$에서 $b = 3$
$\therefore a + b = -1$