1. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$　　② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$　　④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1 (3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3 \times 1.7)$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1$ 이 결과에서

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

2. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$　　② $2a+b \le a+2b$
③ $2a+b > a+2b$　　④ $2a+b \ge a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설
$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$
$\therefore 2a+b > a+2b$

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$ ② $ab \ge 0$ ③ $a+b \ge 0$
④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여
$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$
$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면
a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab < 0$

4. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$　② $A \le B$　③ $A > B$
④ $A \ge B$　⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \ge 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \ge 0$이므로 $A \ge B$

5. 임의의 양의 실수 $x,\ y$에 대하여 $A=\dfrac{x+y}{2},\ G=\sqrt{xy},\ H=\dfrac{2xy}{x+y}$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$ ② $A \geq H \geq G$ ③ $A \geq G \geq H$
④ $H \geq G \geq A$ ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$
$\therefore A \geq G \cdots$ ㉠
$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$
$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$
$\therefore G \geq H \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$

6. $x > 3$일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$

이 때, $x > 3$이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$

$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

7. $a > 0,\ b > 0$일 때, 다음 식 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) &= ab+9+1+\frac{9}{ab}\\ &= 10+ab+\frac{9}{ab}\\ &\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}\\ &= 10+6=16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

8. $x \geq 0,\ y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2　　② 3　　③ $\sqrt{10}$　　④ $\sqrt{15}$　　⑤ 4

해설

$x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^2 \leq (1^2+1^2)\left((\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}$
$=2(x+3y)$
$=16$ (단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x}+\sqrt{3y} \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{x}+\sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 4이다.

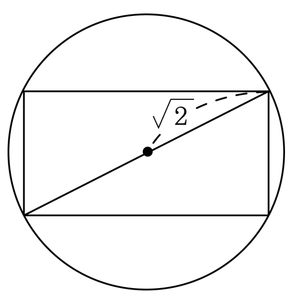
9. x, y가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

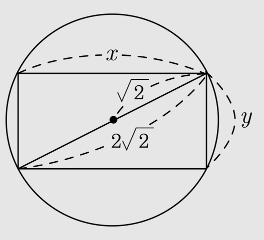
x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\frac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x > 0,\ y > 0)$ 라고 하면
$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2) = 8 \times 8 = 64$ (단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)
$\therefore -8 \le 2x + 2y \le 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.