1. 중심이 $(2, -1)$ 이고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ ② $(x-1)^2+(y+1)^2=7$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=8$ ④ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=10$

해설

구하는 원의 방정식을
$(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$ $\cdots$ ㉠으로 놓으면
이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로
$(0-2)^2+(0+1)^2=r^2$
$\therefore r^2=5$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

2. 원 $x^2+y^2-10x-2y+1=0$의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 반지름의 길이를 r라 할 때, $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$(x^2-10x+25)+(y^2-2y+1)=25$

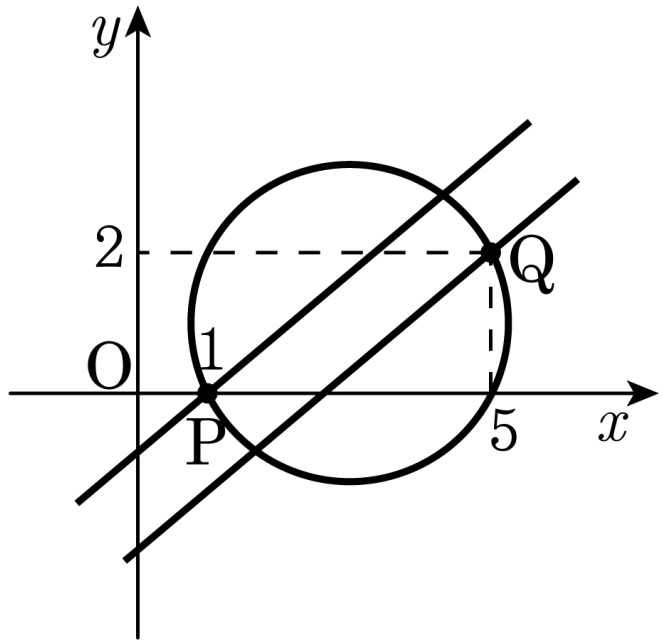
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=5^2$

따라서 중심의 좌표는 $(a,\ b)=(5,\ 1)$

반지름의 길이는 $r=5$이므로

$a+b+r=5+1+5=11$

3. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3 등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(5, 2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$의 중점 C$(3,\ 1)$이므로,

$r^2 = \overline{PC}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

4. 세 점 $(1,\ 1),\ (2,\ -1),\ (3,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$이라 할 때 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0 \cdots\cdots$ ㉡이라 하면

㉡는 점 $(1,1),\ (2,-1),\ (3,\ 2)$를 지나므로

$1+1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0,\ 4+1+2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$,

$9+4+3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$

$\therefore\ \mathrm{A}=-5,\ \mathrm{B}=-1,\ \mathrm{C}=4$

$\therefore\ x^2+y^2-5x-y+4=0$

$\therefore\ \mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=20$

5. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$ ② $c^2 = b$ ③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$ ⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
$x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

6. 두 원 O_1, O_2의 중심거리가 $d = 7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.
② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다.
④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

7. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉠
$y = 2x + k \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면
$5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots$ ㉢
㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면
$D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$
(가)0
k^2(나)5 $\quad \therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k = \pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$
(다): $k^2 - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

8. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$　② $2x - y = 0$　③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$　⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$

$\therefore\ x + 2y = 5$

9. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 과 중심이 같고 점 $(5,\ -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$

$\therefore$ 중심은 $(2,1)$ 이다.

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

$(5,\ -3)$ 을 지나므로 대입하면,

$(5-2)^2+(-3-1)^2=r^2 \quad r=5$

$\therefore \quad a+b+r=2+1+5=8$

10. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

11. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$ ② $4x-3y+4=0$

③ $3x-3y+4=0$ ④ $x-y+4=0$

⑤ $2x-y+1=0$

해설

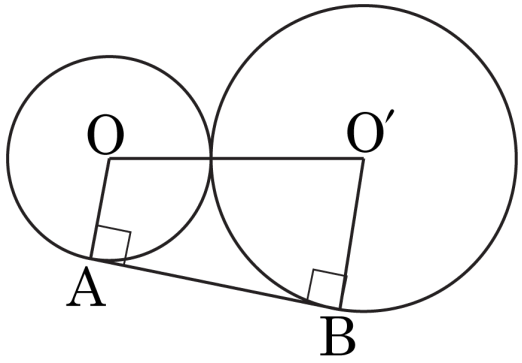
두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-6y+8-\left(x^2+y^2-4y\right)=0$

$2x-2y+8=0$

$\therefore x-y+4=0$

12. 다음 그림의 두 원 O 와 O′ 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{OO'} = 5\,\text{cm}$, $\overline{OA} = 2\,\text{cm}$, $\overline{O'B} = 3\,\text{cm}$ 이다.)



① $\sqrt{6}\,\text{cm}$ ② $2\sqrt{5}\,\text{cm}$ ③ $2\sqrt{6}\,\text{cm}$

④ $\sqrt{5}\,\text{cm}$ ⑤ $3\sqrt{5}\,\text{cm}$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3-2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$

13. 점$(2,\ 1)$을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r은 점 $(2,\ 1)$에서
직선 $x+y-5=0$까지의 거리이므로

$$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

14. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

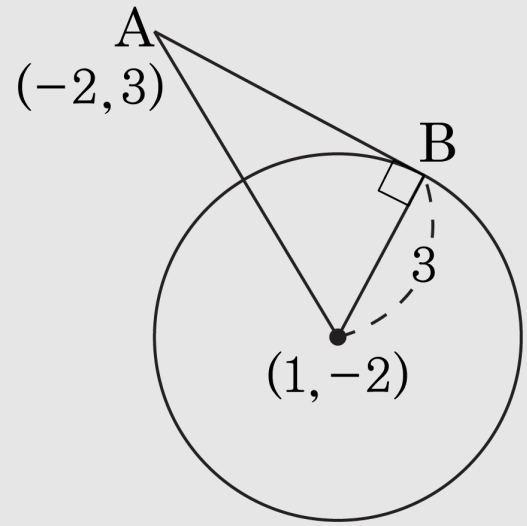
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



15. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ( ) 이다. ( )안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore \quad y = x \pm 2\sqrt{2}$

16. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2, 4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

17. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

18. 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + y^2 = 4$

② $(x-4)^2 + y^2 = 8$

③ $(x-6)^2 + y^2 = 12$

④ $(x-8)^2 + y^2 = 16$

⑤ $(x-10)^2 + y^2 = 20$

해설

조건을 만족하는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{x^2+y^2}$, $\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-6)^2+y^2}$

이때, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 에서 $\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$(x-8)^2 + y^2 = 16$

19. 두 점 $A(-3,0)$, $B(3,0)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=20$ 을 만족시키는 점 P 의 자취를 구하면?

① $x=1$ ② $x=2$ ③ $x^2+y^2=1$

④ $x^2+y^2=2$ ⑤ $x^2+y^2=4$

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$(x+3)^3+y^2+(x-3)^2+y^2=20$

$2x^2+2y^2=2$

$\therefore x^2+y^2=1$

20. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

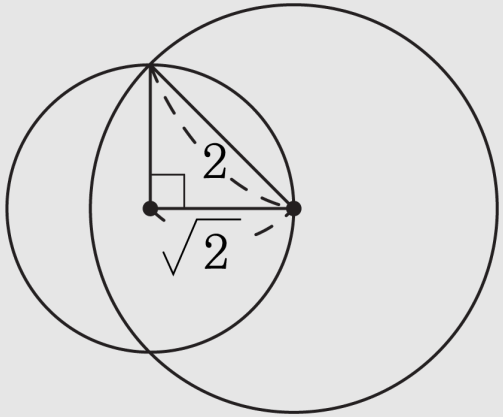
① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$\therefore$ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

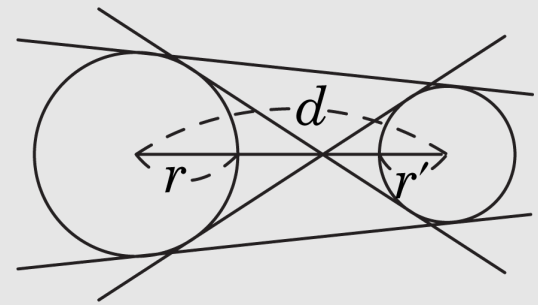
21. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r+r'$, 차 $r\sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.



두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면
$r+r'=5, r\sim r'=1$ $d=9$ 이므로
$r+r'<d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

22. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

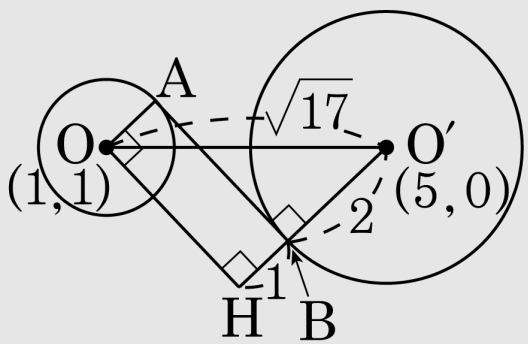
두 원의 중심거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$

이므로 $\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}$

$=\sqrt{17-3^2}=2\sqrt{2}$



따라서, 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

23. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

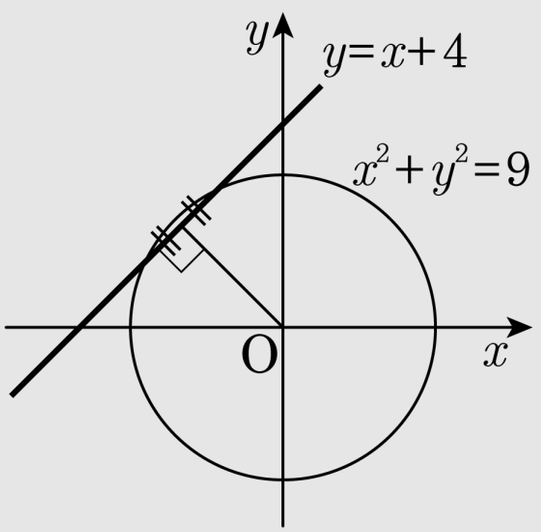
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

24. 점 $(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선을 $y=mx+n$ 이라 할 때, mn의 값은?

① -4 ② -6 ③ -8 ④ -10 ⑤ -12

해설

점 $(3,\ 1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)+1$
이 직선은 원에 접하므로 원의 중심과의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$에서

$$2m^2-3m-2=0$$

$$m=-\frac{1}{2},\ 2$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x-5\ (\because m>0)$

$\therefore\ mn=-10$

25. 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$ 에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx+a$ 이다. 원의 중심 $(0,\ 2)$ 에서 직선 $mx-y+a=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\dfrac{|m\times 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$

$\therefore\ |a-2|=3\sqrt{m^2+1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-(a^2-4a-5)=0$ 이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$ 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$m_1m_2=-\dfrac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1\ ,\ a^2-4a-14=0$

$\therefore\ a=2\pm 3\sqrt{2}$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$