

1. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 - ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 - ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 - ④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.
 - ⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$$\begin{aligned} P - (P - Q) &= P - (P \cap Q^c) = P \cap (P \cap Q^c)^c \\ &= P \cap (P^c \cup Q) = (P \cap P^c) \cup (P \cap Q) = P \cap Q = P \text{ 이므로} \\ P &\subset Q \text{ 이고 } p \Rightarrow q \text{ 이므로 } p \text{ 는 } q \text{ 이기 위한 충분조건이다.} \end{aligned}$$

2. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \emptyset$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?
- ① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 - ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 - ③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 - ④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
 - ⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

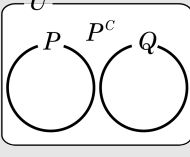
$P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

3. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. $\sim p$ 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $P \cap Q = \phi$
- ② $P \subset Q$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $Q - P = \phi$
- ⑤ $Q^c = P$

해설

$P \subset Q^c \leftrightarrow P - Q^c = P \cap Q = \emptyset$



4. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}ab,$ A(3, 2)

는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 위의 점이므로

$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$

양변을 제곱하면 $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서 $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

5. 다음은 양수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때, $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \therefore P^2 &\geq (\text{가}) \end{aligned}$$

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x = y = z =$ (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ① $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$

② $9, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}$

③ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{3}$

④ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

⑤ $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{조건에서 } x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \text{ 이므로} \\ P^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2 \\ &\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{z^2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}} + 2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3) \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 $(\sqrt{3})$ 이고,

등호는 $x = y = z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로 $x = y = z$ 이면 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. $a^2 + b^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 2$ 일 때, $ax + by$ 의 최댓값과 $ab + xy$ 의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

i) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

$\therefore -2 \leq ax + by \leq 2$

ii) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}, \quad 1 \geq |ab|$

$\therefore -1 \leq ab \leq 1$

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}, \quad 1 \geq |xy|$

$\therefore -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore -2 \leq ab + xy \leq 2$

i), ii)에서, 최댓값의 합은 4

7. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다.
B: A의 말은 진실이다.
C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

- ① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

- (i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.
(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.
(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.
따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

8. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?
- ① $\sqrt{3}$
② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.
⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

‘비둘기집의 원리’를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

$$\text{대각선 길이} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다

9. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?
- 민주: 한결이가 빠졌어.
한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.
은하: 민주가 빠졌어.
겨레: 나는 안 빠졌어.
- ① 겨레, 한결 ② 겨레, 민주 ③ 겨레, 은하
④ 민주, 한결 ⑤ 민주, 은하

해설

㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.