1. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P-(P-Q)=P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.

⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$P-(P-Q)=P-(P\cap Q^c)=P\cap(P\cap Q^c)^c$
$=P\cap(P^c\cup Q)=(P\cap P^c)\cup(P\cap Q)=P\cap Q=P$ 이므로
$P\subset Q$ 이고 $p\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

2. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \varnothing$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.

⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P - Q = \varnothing$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

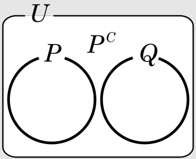
3. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim p$ 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \cap Q = \phi$　　② $P \subset Q$　　③ $Q \subset P$

④ $Q - P = \phi$　　⑤ $Q^c = P$

해설

$P \subset Q^c \leftrightarrow P - Q^c = P \cap Q = \varnothing$



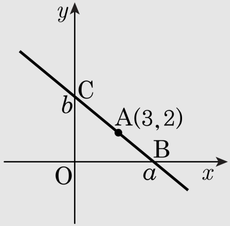
4. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle$OBC 의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$, A$(3,2)$ 는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로



$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$　　$\therefore S\geq 12$

따라서 $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

5. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$
$\therefore P^2 \geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다) 에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore\ P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because\ x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. $a^2+b^2=2$, $x^2+y^2=2$일 때, $ax+by$의 최댓값과 $ab+xy$의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

i) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

$\therefore\ -2 \leq ax+by \leq 2$

ii) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}, \quad 1 \geq |ab|$

$\therefore\ -1 \leq ab \leq 1$

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2}, \quad 1 \geq |xy|$

$\therefore\ -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore\ -2 \leq ab+xy \leq 2$

i), ii)에서, 최댓값의 합은 4

7. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다. B: A의 말은 진실이다. C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

(i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.

(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.

(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

8. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?

① $\sqrt{3}$

② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

'비둘기집의 원리'를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3\times3\times3 = 27$개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

대각선 길이 $= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다

9. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주 : 한결이가 빠졌어. 한결 : 민주가 한 말은 거짓말이야. 은하 : 민주가 빠졌어. 겨레 : 나는 안 빠졌어.

① 겨레, 한결 ② 겨레, 민주 ③ 겨레, 은하
④ 민주, 한결 ⑤ 민주, 은하

해설

㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.