1. 다음 중 p가 q이기 위한 필요조건이 되는 것은? (단, x, y, z, a는 실수)

① $p : x = 1, q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : 0 < x < 1, q : x < 2$

③ $p : a > 3, q : a^2 > 9$

④ $p : xz = yz, q : x = y$

⑤ $p : a$ 는 4의 배수, $q : a$ 는 2의 배수

해설

$p : \ xz = yz, \quad q : \ x = y$

$P : \ xz - yz = (x - y)z = 0,$

$\therefore x = y \ or \ z = 0$

$Q : \ x = y$

$\therefore P \supset Q \quad \rightarrow \quad p \quad \leftarrow \quad q$

2. 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 보기 중에서 모두 고른 것은? (단, a, b 는 실수이다.)

㉠ $p : a \geq b,\ q : a^2 \geq b^2$
㉡ $p : a + b \leq 2,\ q : a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$
㉢ $p : \lvert a - b \rvert = \lvert a \rvert - \lvert b \rvert,\ q : (a - b)\,b \geq 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고 $q \rightarrow p$ 가 거짓인 것을 찾는다.

㉠ $a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$(거짓), 반례 : $a = -1, b = -2$
$a^2 \geq b^2 \rightarrow a \geq b$ (거짓), 반례: $a = -4, b = 3$

㉡ $a + b \leq 2 \rightarrow a \leq 1$ 또는$b \leq 1$ (참), $a \leq 1$ 또는 $b \leq 1 \rightarrow a + b \leq 2$(거짓), 반례 : $a = 0, b = 3$

㉢ $\lvert a - b \rvert = \lvert a \rvert - \lvert b \rvert \leftrightarrow (a - b)b \geq 0$
p, q 모두 $a \geq b$, $b \geq 0$ 또는 $a \leq b$, $b \leq 0$이므로 필요충분조건이다.

3. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은?

① $p: x=-1,\ q: |x|=1$

② p : $\triangle$ABC 에서 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$, q : $\triangle$ABC 는 이등변삼각형

③ $p: a^2+b^2=0$ (단, $a,\ b$ 는 실수), $q: a=b=0$

④ $p: x+y \ge 2,\ xy \ge 1,\ q: x \ge 1,\ y \ge 1$

⑤ $p: A \cap B = A,\ q: A \subset B$

해설

① 두 조건 $p,\ q$ 의 진리집합을 각각 $P,\ Q$ 라고 하면 $P=\{-1\},\ Q=\{-1,\ 1\}$ 이므로 $P \subset Q,\ Q \not\subset P$
따라서, $p \Rightarrow q,\ q \not\Rightarrow p$ 이므로
p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

② $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 이면 $\triangle$ABC 는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그런데 $\triangle$ABC 가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 인 것은 아니다.
$\therefore q \not\Rightarrow p$

③ $a,\ b$ 가 실수일 때, $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x+y \ge 2,\ xy \ge 1$ 이라고 해서 $x \ge 1,\ y \ge 1$ 인 것은 아니다.
$\therefore\ p \not\Rightarrow q$

⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

4. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P = \left\{a^2, 1\right\}$, $Q = \{a, 1\}$ 이다. p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ -1 또는 0 ⑤ 0 또는 1

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로

$P = Q$

$\left\{a^2, 1\right\} = \{a, 1\}$

$a^2 = a$ 또는 $a^2 = 1$

$a = 0,\ 1$ 또는 $a = -1,\ 1$

이 때, $a = -1$ 이면 $\{1, 1\} = \{-1, 1\}$ 이 되어 모순이므로 a 는 0 또는 1 이다.

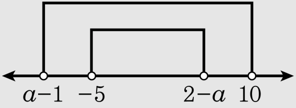
5. 다음 두 조건 $p : a-1 < x \leq 10$, $q : -5 < x \leq 2-a$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값으로 알맞지 <u>않은</u> 것은?

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되기 위해서는

$\{x \mid -5 < x < 2-a\} \subset \{x \mid a-1 < x < 10\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서



$a-1 \leq -5,\ 2-a \leq 10$

$\therefore\ -8 \leq a \leq -4$

6. 두 조건 $p(x)$: $|x-a| \le 1$, $q(x)$: $-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

① 5 개 ② 4 개 ③ 3 개 ④ 2 개 ⑤ 1 개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x|a-1 \le x \le a+1\}$, $Q = \{x|-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a-1$ 이고 $a+1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots$ ㉠

(ii) $3 \le a-1$ 이고 $a+1 \le 5$, 즉 $a = 4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 정수 a는 4뿐이므로 1개이다.

7. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P-(P-Q)=P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.

⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$P-(P-Q)=P-(P\cap Q^c)=P\cap(P\cap Q^c)^c$

$=P\cap(P^c\cup Q)=(P\cap P^c)\cup(P\cap Q)=P\cap Q=P$ 이므로

$P\subset Q$ 이고 $p\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

8. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P-Q=\varnothing$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.

⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P-Q=\varnothing$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

9. 전체집합 U에 대하여 두 집합이 $A=\{x \mid x>3\}$, $B=\{x \mid x \leq -1\}$ 일 때, 주어진 조건 또는 명제를 집합으로 바르게 표현한 것은?

① 조건 : $x<3$, 집합표현 : A^c

② 조건 : $x \geq -1$, 집합표현 : B^c

③ 조건 : $-1<x \leq 3$, 집합표현 : $(A \cap B)^c$

④ 명제 : $x>3 \rightarrow x>-1$, 집합표현 : $A \subset B^c$

⑤ 조건 : $x \leq 3$ 또는 $x>-1$, 집합표현 : $(A \cup B)^c$

해설

① A^c 은 $x \leq 3$ 이다.
② B^c 은 $x>-1$ 이다.
③ $(A \cap B)^c$ 에서 $A \cap B=\phi$ 이므로 $(A \cap B)^c$ 은 전체집합 U 이다.
⑤ $(A \cup B)^c$ 은 $-1<x \leq 3$ 이다.

10. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=4$가 성립할 때, 실수 c의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$a+b+c=2 \Rightarrow a+b=2-c$

$a^2+b^2+c^2=4 \Rightarrow a^2+b^2=4-c^2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$2(4-c^2) \geq (2-c)^2$

$8-2c^2 \geq 4-4c+c^2$

$3c^2-4c-4 \leq 0$

$(c-2)(3c+2) \leq 0,$

$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$

$\therefore$ c의 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

합 : $2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

11. 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=2$가 성립할 때, x의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x+2y+z=1 \Rightarrow 2y+z=1-x$

$x^2+y^2+z^2=2 \Rightarrow y^2+z^2=2-x^2$

$(2^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (2y+z)^2$

($\because$ 코시-슈바르츠 부등식)

$5(2-x^2) \geq (1-x)^2$

$6x^2-2x-9 \leq 0$

$$\frac{1-\sqrt{55}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{55}}{6}$$

$\therefore$ 최댓값 $+$ 최솟값 $= \frac{1}{3}$

12. 자연수 p, q가 두 부등식 $p(4x^2+9y^2+16z^2) \geq (2x+3y+4z)^2$ 와 $q\left(x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\right) \geq (x+y+z)^2$ 을 만족할 때 pq의 최솟값은? (단, x, y, z는 실수)

① 6　　② 9　　③ 12　　④ 15　　⑤ 18

해설

x, y, z는 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
(i) $(1^2+1^2+1^2)\left((2x)^2+(3y)^2+(4z)^2\right\}$
$\geq (2x+3y+4z)^2$
$3(4x^2+9y^2+16z^2) \geq (2x+3y+4z)^2$
(단, 등호는 $2x=3y=4z$ 일 때 성립)
따라서 $p(4x^2+9y^2+16z^2) \geq (2x+3y+4z)^2$ 이 성립하려면
$p \geq 3$
(ii) $\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}$

$$\left\{x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \geq (x+y+z)^2$$

$$6\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right) \geq (x+y+z)^2$$

(단, 등호는 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 일 때 성립)

따라서 $q(x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}) \geq (x+y+z)^2$ 이 성립하려면 $q \geq 6$

(i), (ii)에서 pq의 최솟값은 18이다.