1. 다음 중 p가 q이기 위한 필요조건이 되는 것은? (단, x, y, z, a는 실수)

① $p : x = 1, q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : 0 < x < 1, q : x < 2$

③ $p : a > 3, q : a^2 > 9$

④ $p : xz = yz, q : x = y$

⑤ $p : a$ 는 4의 배수, $q : a$ 는 2의 배수

해설

$p :\ xz = yz, \quad q :\ x = y$

$P :\ xz - yz = (x - y)z = 0,$

$\therefore x = y\ or\ z = 0$

$Q :\ x = y$

$\therefore P \supset Q \quad \rightarrow \quad p \ \leftarrow \ q$

2. 다음 보기의 $\boxed{}$안에 알맞은 것을 차례로 적으면?

보기

㉠ 세 집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

① 충분, 필요 ② 필요, 충분

③ 필요, 필요 ④ 필요충분, 필요

⑤ 필요충분, 필요충분

해설

㉠ $A \cup C = B \cup C$ $\underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ $A = B$ <반례> $A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{1,\ 2\}$

$\therefore$ 필요조건

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0,\ (x - y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$ $\underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ $x = y = 0$

$\therefore$ 필요조건 [반례] $x = 1,\ y = 1$

3. 네 집합 A, B, C, D 가 $A \subset B,\ C \subset D$ 를 만족시킬 때, 다음 (1), (2) 의 $\boxed{}$ 안에 들어갈 내용을 <보기> 에서 찾아 차례로 나열한 것을 고르면?

㉠ $B \subset C$ 인 것은 $A \subset D$ 이기 위한 $\boxed{}$
㉡ $B \cap D \neq \varnothing$ 인 것은 $A \cap C \neq \varnothing$ 이기 위한 $\boxed{}$

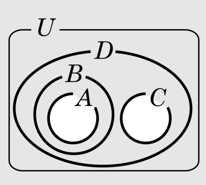
보기

Ⅰ. 필요조건이나, 충분조건은 아니다.
Ⅱ. 충분조건이나, 필요조건은 아니다.
Ⅲ. 필요충분조건이다.
Ⅳ. 아무 조건도 아니다.

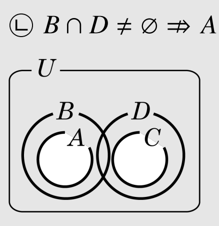
① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅰ ④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅱ

해설

㉠ $B \subset C$ 이면 $A \subset B \subset C \subset D$
$(\because\ A \subset B,\ C \subset D)\ \therefore\ A \subset D$
그러나 $A \subset D$ 이면 $B \subset C$ 는 성립하지 않는다. 따라서, 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
[반례]



㉡ $B \cap D \neq \varnothing \nRightarrow A \cap C \neq \varnothing$ [반례]



4. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P-(P-Q)=P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.

⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$P-(P-Q)=P-(P\cap Q^c)=P\cap(P\cap Q^c)^c$
$=P\cap(P^c\cup Q)=(P\cap P^c)\cup(P\cap Q)=P\cap Q=P$ 이므로
$P\subset Q$ 이고 $p\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

5. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \cup (Q - P) = P$ 인 관계가 성립한다면 q 는 p 이기 위한 무슨 조건인가?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

해설

$$\begin{aligned} P \cup (Q - P) &= P \cup (Q \cap P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap U \\ &= P \cup Q \end{aligned}$$

에서 $P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$

따라서, q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

6. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$　② $P \cap Q = Q$　③ $P \cap Q = P$

④ $P^c = Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \rightarrow \sim q$이고, 대우 $q \rightarrow p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

7. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=4$가 성립할 때, 실수 c의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$a+b+c=2 \Rightarrow a+b=2-c$

$a^2+b^2+c^2=4 \Rightarrow a^2+b^2=4-c^2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$2(4-c^2) \geq (2-c)^2$

$8-2c^2 \geq 4-4c+c^2$

$3c^2-4c-4 \leq 0$

$(c-2)(3c+2) \leq 0,$

$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$

$\therefore$ c의 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

합 : $2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

8. a, b가 양의 상수이고, x, y가 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 만족하면서 변할 때, $x+y$의 최댓값은?

① a^2　② b^2　③ $\sqrt{a^2+b^2}$
④ a^2+b^2　⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식
$(a^2+b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \geq (x+y)^2$은 항상 성립하므로
$a^2+b^2 \geq (x+y)^2 \cdots\cdots$ ①
$\therefore x+y \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdots\cdots$ ②
①의 등호가 성립할 조건은
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이고 $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2} \cdots\cdots$ ③
또, ③의 등호는 $x+y \geq 0$일 때, 성립하므로
③을 풀면
$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$이고,
$x+y$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이다.

9. 다음 부등식 중 $(ax+by+cx)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ 을 이용하여 증명할 수 있는 것은?

㉠ $(2x+3y+4z)^2 \le 9(2x^2+3y^2+4z^2)$

㉡ $(x+y+z)^2 \le 14\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)$

㉢ $(x+y+z)^2 \le 6\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right)$

㉣ $(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+y}+\sqrt{c+z})^2 \ge$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$

① ㉠, ㉡, ㉢　　② ㉠, ㉡, ㉣　　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $(2x+3y+4z)^2$

$=\left\{\sqrt{2}(\sqrt{2}x)+\sqrt{3}(\sqrt{3}y)+\sqrt{4}(\sqrt{4}z)\right\}^2$

$\le (2+3+4)(2x^2+3y^2+4z^2)=9(2x^2+3y^2+4z^2)$

㉡ $(x+y+z)^2=(1\cdot x+2\cdot\frac{y}{2}+3\cdot\frac{z}{3})^2$

$\le (1^2+2^2+3^2)\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)$

$=14\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)$

㉢ $(x+y+z)^2$

$=\left(1\cdot x+\sqrt{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2$

$\le (1+2+3)\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right)$

$=6\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right)$

㉣ 코시-슈바르츠 부등식을 이용하지 않고,
(좌변)− (우변)≥ 0임을 보여야 한다.