

1. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되는 것은? (단, x, y, z, a 는 실수)

① $p : x = 1, q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : 0 < x < 1, q : x < 2$

③ $p : a > 3, q : a^2 > 9$

④ $p : xz = yz, q : x = y$

⑤ $p : a$ 는 4의 배수, $q : a$ 는 2의 배수

해설

$$p : xz = yz, \quad q : x = y$$

$$P : xz - yz = (x - y)z = 0,$$

$$\therefore x = y \text{ or } z = 0$$

$$Q : x = y$$

$$\therefore P \supset Q \rightarrow p \leftarrow q$$

2. 다음 보기의 안에 알맞은 것을 차례로 적으면?

보기

㉠ 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위한 조건이다.

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 조건이다.

① 충분, 필요

② 필요, 충분

③ 필요, 필요

④ 필요충분, 필요

⑤ 필요충분, 필요충분

해설

㉠ $A \cup C = B \cup C$ $A = B$ <반례> $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$

$\therefore$ 필요조건

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0, (x - y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$
 $x = y = 0$

$\therefore$ 필요조건 [반례] $x = 1, y = 1$

3. 네 집합 A, B, C, D 가 $A \subset B$, $C \subset D$ 를 만족시킬 때, 다음 (1), (2)의 안에 들어갈 내용을 <보기>에서 찾아 차례로 나열한 것을 고르면?

㉠ $B \subset C$ 인 것은 $A \subset D$ 이기 위한

㉡ $B \cap D \neq \emptyset$ 인 것은 $A \cap C \neq \emptyset$ 이기 위한

보기

I. 필요조건이나, 충분조건은 아니다.

II. 충분조건이나, 필요조건은 아니다.

III. 필요충분조건이다.

IV. 아무 조건도 아니다.

① I, II

② I, III

③ II, I

④ II, IV

⑤ III, II

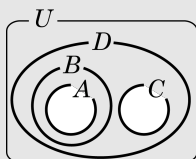
해설

㉠ $B \subset C$ 이면 $A \subset B \subset C \subset D$

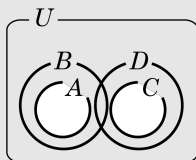
($\because A \subset B, C \subset D$) $\therefore A \subset D$

그러나 $A \subset D$ 이면 $B \subset C$ 는 성립하지 않는다. 따라서, 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

[반례]



㉡ $B \cap D \neq \emptyset \nRightarrow A \cap C \neq \emptyset$ [반례]



4. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.
- ⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$$\begin{aligned} P - (P - Q) &= P - (P \cap Q^c) = P \cap (P \cap Q^c)^c \\ &= P \cap (P^c \cup Q) = (P \cap P^c) \cup (P \cap Q) = P \cap Q = P \text{ 이므로} \\ P &\subset Q \text{ 이고 } p \Rightarrow q \text{ 이므로 } p \text{ 는 } q \text{ 이기 위한 충분조건이다.} \end{aligned}$$

5. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \cup (Q - P) = P$ 인 관계가 성립한다면 q 는 p 이기 위한 무슨 조건인가?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

해설

$$\begin{aligned} P \cup (Q - P) &= P \cup (Q \cap P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap U \\ &= P \cup Q \end{aligned}$$

에서 $P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$
따라서, q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

6. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \emptyset$

② $P \cap Q = Q$

③ $P \cap Q = P$

④ $P^c = Q$

⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$ 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \rightarrow \sim q$ 이고, 대우 $q \rightarrow p$ 는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$ 가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

7. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 가 성립할 때, 실수 c 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$a + b + c = 2 \Rightarrow a + b = 2 - c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 - c^2$$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$2(4 - c^2) \geq (2 - c)^2$$

$$8 - 2c^2 \geq 4 - 4c + c^2$$

$$3c^2 - 4c - 4 \leq 0$$

$$(c - 2)(3c + 2) \leq 0,$$

$$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$$

$$\therefore c \text{의 최댓값 : } 2, \text{ 최솟값 : } -\frac{2}{3}$$

$$\text{합 : } 2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

8. a, b 가 양의 상수이고, x, y 가 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 만족하면서 변할 때, $x + y$ 의 최댓값은?

① a^2

② b^2

③ $\sqrt{a^2 + b^2}$

④ $a^2 + b^2$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \geq (x + y)^2 \text{은 항상 성립하므로}$$

$$a^2 + b^2 \geq (x + y)^2 \dots\dots ①$$

$$\therefore x + y \leq \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots ②$$

①의 등호가 성립할 조건은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 이고 } \frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \dots\dots ③$$

또, ③의 등호는 $x + y \geq 0$ 일 때, 성립하므로

③을 풀면

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 이고,}$$

$x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.

9. 다음 부등식 중 $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ 을 이용하여 증명할 수 있는 것은?

㉠ $(2x + 3y + 4z)^2 \leq 9(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)$

㉡ $(x + y + z)^2 \leq 14\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)$

㉢ $(x + y + z)^2 \leq 6\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right)$

㉤ $(\sqrt{a+x} + \sqrt{b+y} + \sqrt{c+z})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉢, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉠ $(2x + 3y + 4z)^2$

$= \left\{ \sqrt{2}(\sqrt{2}x) + \sqrt{3}(\sqrt{3}y) + \sqrt{4}(\sqrt{4}z) \right\}^2$

$\leq (2 + 3 + 4)(2x^2 + 3y^2 + 4z^2) = 9(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)$

㉡ $(x + y + z)^2 = \left(1 \cdot x + 2 \cdot \frac{y}{2} + 3 \cdot \frac{z}{3}\right)^2$

$\leq (1^2 + 2^2 + 3^2) \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)$

$= 14 \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)$

㉢ $(x + y + z)^2$

$= \left(1 \cdot x + \sqrt{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \cdot \frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2$

$\leq (1 + 2 + 3) \left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right)$

$= 6 \left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right)$

㉤ 코시-슈바르츠 부등식을 이용하지 않고,
(좌변) - (우변) ≥ 0 임을 보여야 한다.