

1. 두 집합 $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $f : x \rightarrow x$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x|$

㉣ $k : x \rightarrow x^2 - 1$

① ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $f(x) = x$ 에서 $f(-1) = -1$ 이고 $-1 \notin Y$ 이므로, 함수가 아니다.

㉡ $g(x) = x+2$ 에서 $g(-1) = 1 \in Y$, $g(1) = 3 \in Y$, $g(2) = 4 \in Y$ 이므로 함수이다.

㉢ $h(x) = |x|$ 에서 $h(-1) = 1 \in Y$, $h(1) = 1 \in Y$, $h(2) = 2 \in Y$ 이므로 함수이다.

㉣ $k(x) = x^2-1$ 에서 $k(-1) = 0 \notin Y$, $k(1) = 0 \notin Y$, $k(2) = 3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases} \text{가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 } a, b$$

의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a = 1, b = -1$

② $a = 1, b = 1$

③ $a = 2, b = -1$

④ $a = 2, b = 0$

⑤ $a = -1, b = 2$

해설

f 가 일대일대응이 되려면

$y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y = ax + b$ 가

점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

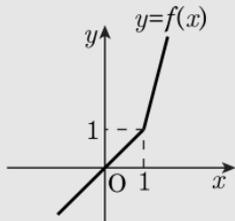
또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선

$y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

따라서 주어진 보기 중 ⑦, ⑧을

모두 만족시키는 것은 ③이다.



3. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2$ 일 때, $f(x)$ 는 무엇인가?

① $f(x) = x+2$

② $f(x) = x-2$

③ $f(x) = 2x$

④ $f(x) = 2x+1$

⑤ $f(x) = 2x+2$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2 \quad \dots \textcircled{1} \text{에서}$$

$$\frac{x+1}{2} = t \text{라 하면 } x = 2t - 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } f(t) = 2t - 1 + 2 = 2t + 1$$

$$\therefore f(x) = 2x + 1$$

4. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3 + 1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(2) = x \text{ 로 놓으면}$$

$$(g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(2) = x$$

$$(f^{-1} \circ g)(2) = x$$

$$g(2) = f(x)$$

$$2^3 + 1 = 2x - 1 \text{ 에서 } 9 = 2x - 1$$

$$\therefore x = 5$$

5. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때,
 $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로
 $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$
 $3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$
 $\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

6. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

① 21

② 27

③ 33

④ 37

⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$

일대일 대응의 개수는

$3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$

상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지

$\therefore s = 3$

항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$

따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

7. 함수 $f(x) = x + 3$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

① 300

② 400

③ 500

④ 600

⑤ 700

해설

$$f^1(x) = x + 3$$

$$f^2(x) = f(f^1(x)) = f(x + 3) = x + 6$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x + 6) = x + 9$$

∴ 이므로

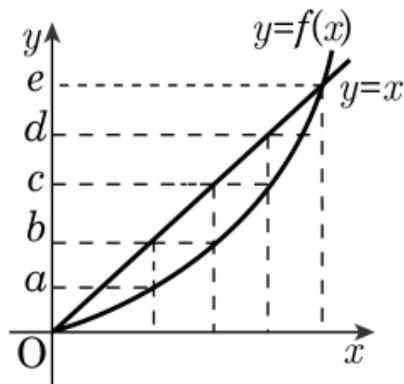
$f^n(x) = x + 3n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로
추정할 수 있다.

따라서, $f^{100}(x) = x + 300$ 이므로

$$f^{100}(100) = 100 + 300 = 400$$

8. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$$

$$f^{-1}(b) = k \text{ 라고 하면, } f(k) = b$$

$$\therefore k = c \quad \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$$

$$\text{또, } f^{-1}(c) = t \text{ 라고 하면, } f(t) = c$$

$$\therefore t = d \quad \therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$$

9. 두 함수 $y = |x + 1| - |x - 2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m 의 값을 정할 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x + 1| - |x - 2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) - (-x + 2) = -3$$

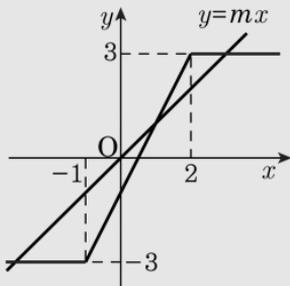
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (-x + 2) = 2x - 1$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (x - 2) = 3$$

i) ii) iii)에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$ 따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④번이다.



10. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.

따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.

$$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$A = \{x \mid x \geq a\} \text{ 이므로 } a = 2$$