1. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $Q(3)+3$ ② $Q(3)+4$ ③ $2Q(3)+3$

④ $2Q(3)+4$ ⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 놓으면

$f(1)=a+b=1$, $f(2)=2a+b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

즉 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x$

$\therefore\ f(3)=2Q(3)+3$

3. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.
이 문제에서는 $x = 2$ 를 양변에 대입하면
$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$
$\therefore\ a + b + c + d = 3$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.
$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$
$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$
즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	−3	−1	1	
		2	−1	−2	
1	2	−1	−2	−1	← d
		2	1		
1	2	1	−1	← c	
		2			
	2	3	← b		
	↑				
	a				

$\therefore\ a + b + c + d = 3$

4. 다항식 $f(x)$를 $(3x+2)(x-4)$로 나눈 나머지가 $-2x+1$일 때, $f(x^2+3)$을 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 7 ② 4 ③ 0 ④ -4 ⑤ -7

해설

$f(x) = (3x+2)(x-4)Q(x) - 2x + 1 \cdots ①$

$f(x^3+3) = (x-1)Q'(x) + R \cdots ②$

①의 양변에 $x=4$를 대입하면 $f(4) = -7$

②의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(4) = R$

$\therefore\ R = -7$

5. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2-20a+25)$

④ $(x^2-x)\,(x^2-x+1) - 6 = (x^2-x+3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$64a^3 - 125$
$= (4a)^3 - (5)^3$
$= (4a-5)\left(16a^2+20a+25\right)$

6. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$ ㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠,㉡

④ ㉠,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0\cdots①$
$f(-1)-g(-1)=2\cdots②$
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
∴ ㉠, ㉡

7. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3 ② $3x+3$ ③ $3x-3$

④ $6x-9$ ⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$

$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$

$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$

$a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

8. $a,\ b,\ c$가 $\triangle ABC$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$

$a^2(a+b)-b^2(a+b)-c(a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a^2-ac+bc-b^2)=0$

$(a+b)\{((a-b)(a+b)-c(a-b)\}=0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c)=0$

$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$

$\therefore a=b$인 이등변삼각형

9. n이 자연수일 때, x의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots①$

$x=3$을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$

$\therefore\ b=-3a-9\cdots②$

②를 ①에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$\therefore\ (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

양변을 $x-3$으로 나눈 몫을 비교하면

$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$

$x=3$을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n\ \therefore\ 6+a=1\ \therefore\ a=-5$

②에서 $b=6$

$\therefore\ a=-5,\ b=6\ \therefore\ a+b=1$

10. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b=-\sqrt{2},\ b+c=\sqrt{2}$일 때, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$의 값은?

① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ -2

해설

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$$
$$=\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}$$
$$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$
$$-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)\}$$
$$=0$$