

1. $0 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$$

$0 \leq x \leq 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,

최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.

$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고

최솟값은 $a - 24$ 이다.

최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로

$$(a + 1) + (a - 24) = 10$$

$$\therefore a = \frac{33}{2}$$

2. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최소값은 ? (단, a 는 실수)

① 12

② 9

③ 6

④ 3

⑤ 2

해설

$x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 에서

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = 9 - 2a^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8a^2 - 18$$

또 α, β 는 실근이므로 $\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0$

$$\therefore a^2 \geq 3$$

따라서 $a^2 = 3$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은 최소이고

최소값은 6 이다.

3. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$
 $= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1$
이 때, x, y, z 가 실수이므로
 $(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$
따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1 이다.

4. $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m 을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x - y = k$ 로 놓으면
 $y = 2x - k \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 을 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면
 $x^2 + (2x - k)^2 = 5$
 $\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 x 에 대한 이차방정식으로 보면
 x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) \geq 0, k^2 \leq 25$
 $\therefore -5 \leq k \leq 5$
따라서 k 의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y 의 값은
 $\textcircled{2}$ 에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0, 5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
 $\textcircled{1}$ 에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$ 이므로
 $m + \alpha + \beta = 6$

5. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①는 두 실근을 가지므로,

$$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0, \text{ 즉 } a^2 - 4 \leq 0 \therefore -2 \leq a \leq 2$$

그런데 α, β 는 ①의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a^2 - 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$$0 \leq a^2 \leq 4$$

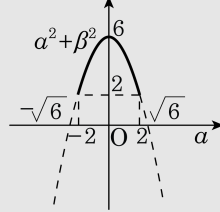
$$\therefore 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$$

$$\therefore 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$$

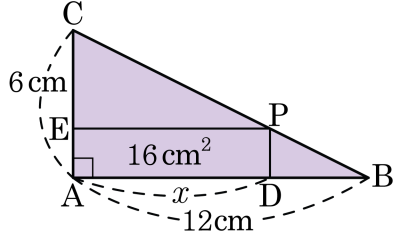
따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최댓이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최솟이고, 최솟값 : 2



6. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗면 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD} > 6\text{cm}$)



- ① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle CEP \sim \triangle CAB$ (AA닮음) 이므로

$$\overline{CE} : \overline{EP} = \overline{CA} : \overline{AB}$$

$$\text{즉, } \overline{CE} : x = 6 : 12$$

$$\therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{따라서 } \overline{EA} = 6 - \frac{1}{2}x \text{ 이므로 } x \left(6 - \frac{1}{2}x \right) = 16$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 - 12x + 32 = (x - 4)(x - 8) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

그런데 $6 < x < 12$ 이므로 $x = 8(\text{cm})$

7. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y = 2n^2 - 11n + 20$ 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$\begin{aligned}y &= 2n^2 - 11n + 20 \\&= 2\left(n^2 - \frac{11}{2}n + \frac{121}{16}\right) - \frac{121}{8} + 20 \\&= 2\left(n - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}\end{aligned}$$

n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n = 3$ 일 때,

최솟값 $2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 20 = 5$ 를 갖는다.

8. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$ ④ $\frac{31}{2}$ ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

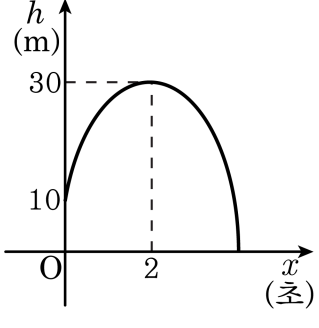
9. 실수 x, y 가 $2x^2 + y^2 = 4x$ 를 만족할 때 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면, $M - m$ 의 값은 얼마인가?

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y^2 = -2x^2 + 4x$ 를 $x^2 + y^2$ 에 대입하면
 $-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \cdots$ ①
 x, y 가 실수이므로
 $-2x^2 + 4x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \leq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 2 \cdots$ ②
② 의 범위에서 ①의 최대, 최소는
 $x = 0$ 일 때 최솟값 0, $x = 2$ 일 때 최댓값 4 이다.
 $\therefore M - m = 4$

10. 다음 그림은 지면으로부터 10m 높이에서 던져 올린 물체의 운동을 나타내는 그래프이다. 던진 후 몇 초 만에 다시 지면으로 떨어지는가?



- ① 4 초
- ② $(\sqrt{6}-2)$ 초
- ③ $(2+\sqrt{6})$ 초
- ④ 5 초
- ⑤ 6 초

해설

$y = a(x-2)^2 + 30$ 이고, $(0, 10)$ 을 지난다.
 $10 = 4a + 30$
 $\therefore a = -5$
 $\therefore y = -5(x-2)^2 + 30 = -5x^2 + 20x + 10$
 $x^2 - 4x - 2 = 0$
 $\therefore x = 2 + \sqrt{6} \ (\because x > 0)$