1. $0 \le x \le 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{11}{2}$　② 11　③ $\frac{33}{2}$　④ 22　⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$$

$0 \le x \le 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,
최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.
$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고
최솟값은 $a - 24$ 이다.
최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로
$(a + 1) + (a - 24) = 10$

$\therefore a = \frac{33}{2}$

2. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 최소값은 ? (단, a 는 실수)

① 12 ② 9 ③ 6 ④ 3 ⑤ 2

해설

$x^2+2ax+9-2a^2=0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=9-2a^2$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8a^2-18$
또 α, β 는 실근이므로 $\dfrac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$
$\therefore a^2\geq 3$
따라서 $a^2=3$ 일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

3. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$

$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$

이 때, x, y, z가 실수이므로

$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$

$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$

따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,

주어진 식의 최솟값은 -1이다.

4. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면

$y=2x-k \cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x-k)^2=5$

$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡

㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면

x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$

$\therefore -5 \le k \le 5$

따라서 k의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y의 값은

㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

㉠에서 $y=4-5=-1$

따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로

$m+\alpha+\beta=6$

5. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots$ ㉠

㉠는 두 실근을 가지므로,

$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0$, 즉 $a^2 - 4 \leq 0$ $\therefore\ -2 \leq a \leq 2$

그런데 α, β 는 ㉡의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a^2 - 3$

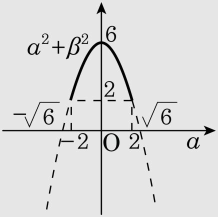
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$0 \leq a^2 \leq 4$

$\therefore\ 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$

$\therefore\ 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$

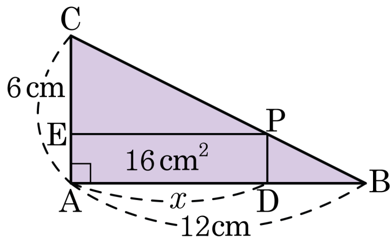


따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2

6. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD} > 6\text{cm}$)



① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle CEP \backsim \triangle CAB$ (AA닮음) 이므로

$\overline{CE} : \overline{EP} = \overline{CA} : \overline{AB}$

즉, $\overline{CE} : x = 6 : 12$

$\therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}x$

따라서 $\overline{EA} = 6 - \frac{1}{2}x$ 이므로 $x\left(6 - \frac{1}{2}x\right) = 16$

$-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 16$

$x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = 8$

그런데 $6 < x < 12$ 이므로 $x = 8(\text{cm})$

7. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y=2n^2-11n+20$ 의 최솟값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$$y=2n^2-11n+20$$
$$=2\left(n^2-\frac{11}{2}n+\frac{121}{16}\right)-\frac{121}{8}+20$$
$$=2\left(n-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{39}{8}$$

n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n=3$ 일 때,

최솟값 $2\cdot3^2-11\cdot3+20=5$ 를 갖는다.

8. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{21}{4}$　　② $\frac{13}{2}$　　③ $\frac{33}{4}$　　④ $\frac{31}{2}$　　⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

9. 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2+y^2=4x$ 를 만족할 때 x^2+y^2 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면, $M-m$ 의 값은 얼마인가?

① 3　　② $\frac{7}{2}$　　③ 4　　④ $\frac{9}{2}$　　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y^2=-2x^2+4x$ 를 x^2+y^2 에 대입하면

$-x^2+4x=-(x-2)^2+4\cdots$ ①

$x,\ y$ 가 실수이므로

$-2x^2+4x\geq 0\ \rightarrow\ x(x-2)\leq 0$

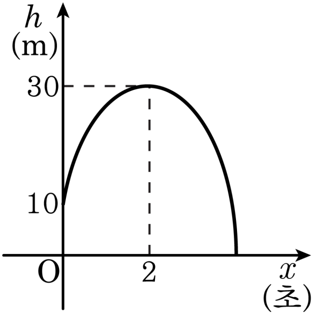
$\therefore\ 0\leq x\leq 2\cdots$ ②

② 의 범위에서 ①의 최대, 최소는

$x=0$ 일 때 최솟값 0, $x=2$ 일 때 최댓값 4 이다.

$\therefore\ M-m=4$

10. 다음 그림은 지면으로부터 10m 높이에서 던져 올린 물체의 운동을 나타내는 그래프이다. 던진 후 몇 초 만에 다시 지면으로 떨어지는가?



① 4 초
② $(\sqrt{6}-2)$ 초
③ $(2+\sqrt{6})$ 초
④ 5 초
⑤ 6 초

해설

$y=a(x-2)^2+30$ 이고, $(0,\ 10)$ 을 지난다.

$10=4a+30$

$\therefore a=-5$

$\therefore y=-5(x-2)^2+30=-5x^2+20x+10$

$x^2-4x-2=0$

$\therefore x=2+\sqrt{6}\ \ (\because x>0)$