

1. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 1$ 을 만족할 때, 곱 xy 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} \text{ 이고}$$

$$\sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |xy| \text{ 이므로 } |xy| \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$$

그러므로 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

2. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

3. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.
- ③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

4. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

5. $x > 0, y > 0$ 일 때, $4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 0, y > 0$ 일 때 $4x + y \geq 2\sqrt{4xy}$ 이므로

$$\begin{aligned} 4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}} &\geq 2\sqrt{4xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \\ &\geq 2\sqrt{4\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}} = 4 \end{aligned}$$

$\therefore 4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 4$, 최솟값 4

6. $a > 0, b > 0$ 일 때, 부등식 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq k$ 가 항상 성립하는 k 의 범위를 구하면 ?

① $k \geq 9$

② $k \leq 9$

③ $k \geq 4$

④ $k \leq 4$

⑤ $k \leq -4$

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 1 + 4 + \frac{4}{ab} = ab + \frac{4}{ab} + 5$$

그런데, a, b 가 양수이므로 $ab > 0, \frac{4}{ab} > 0$

$$\therefore ab + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5$$

$$\therefore k \leq 9$$

7. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

8. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

- ① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면
 $xy = 8 \cdots \textcircled{1}$
피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.
 $x > 0, y > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
 $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$
 $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$ 일 때 성립한다.
 $x = y$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 = 8$
따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.
 $4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

9. 세 양수 x, y, z 가 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때,
 $\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(2 + \frac{1}{y}\right)\left(2 + \frac{1}{z}\right)$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 8 + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{1}{xyz} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} &= \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{xyz} \text{ 이므로} \\ (\text{준식}) &= 8 + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{3}{xyz} \\ x+y+z &= 1 \text{ 이므로} \\ \frac{1}{3} &= \frac{x+y+z}{3} \geq 3\sqrt{xyz} \\ \left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3} \text{ 일 때 성립}\right) \\ \therefore xyz &\leq \frac{1}{27} \quad \therefore \frac{1}{xyz} \geq 27 \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &\geq \frac{3}{3\sqrt{xyz}} \geq 9 \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 (준식)} &\geq 8 + 36 + 81 = 125\end{aligned}$$

10. 실수 x 에 대하여, 분수식 $\frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)} + \frac{4}{(x^2 + 1)} \\ &= (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} + 1 \\ & x^2 + 1 > 0 \text{ 이므로,} \\ & (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} \geq 2 \cdot \sqrt{(x^2 + 1) \cdot \frac{4}{(x^2 + 1)}} = 4 \\ & \therefore (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} + 1 \geq 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$