

1. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$
- ② $P \cap Q = \emptyset$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $P \subset Q$
- ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

2. 명제 ‘ x 가 소수이면 x 는 홀수이다.’는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

3. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되는 것은? (단, x, y, z, a 는 실수)

- ① $p : x = 1, q : x^2 - 3x + 2 = 0$
- ② $p : 0 < x < 1, q : x < 2$
- ③ $p : a > 3, q : a^2 > 9$
- ④ $p : xz = yz, q : x = y$
- ⑤ $p : a$ 는 4의 배수, $q : a$ 는 2의 배수

해설

$$p : xz = yz, \quad q : x = y$$
$$P : xz - yz = (x - y)z = 0,$$
$$\therefore x = y \text{ or } z = 0$$
$$Q : x = y$$
$$\therefore P \supset Q \rightarrow p \leftarrow q$$

4. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P = \{a^2, 1\}$, $Q = \{a, 1\}$ 이다. p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ -1 또는 0

⑤ 0 또는 1

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로

$$P = Q$$

$$\{a^2, 1\} = \{a, 1\}$$

$$a^2 = a \text{ 또는 } a^2 = 1$$

$$a = 0, 1 \text{ 또는 } a = -1, 1$$

이 때, $a = -1$ 이면 $\{1, 1\} = \{-1, 1\}$ 이 되어 모순이므로 a 는 0 또는 1 이다.

5. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 - ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 - ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 - ④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.
 - ⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$P - (P - Q) = P - (P \cap Q^c) = P \cap (P \cap Q^c)^c$
 $= P \cap (P^c \cup Q) = (P \cap P^c) \cup (P \cap Q) = P \cap Q = P$ 이므로
 $P \subset Q$ 이고 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

6. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 ‘ n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’를 증명한 것이다.

주어진 명제의 대우를 구하면 ‘ n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{㉗}}$ 이다. n 이 3의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{\text{㉙}}$ (m 은 자연수)에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$ 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{㉔}}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{\text{㉒}}$ 그러므로 대우가 $\boxed{\text{㉓}}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{㉓}}$ 이다.

위

의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

- ① (가) 3의 배수가 아니다. ② (나) 1
③ (다) 자연수 ④ (라) 3의 배수이다.
⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 ‘ n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다’이다. n 이 3의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수)에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$ 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{3\text{의 배수가 아니다.}}$ 그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$ 이다.

7. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같다.

$$p : (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$$
$$q : A = B$$
$$r : A \cup B = B$$

이 때, 조건 p 는 조건 q 이기 위한 ㉠조건이고, 조건 q 는 조건 r 이기 위한 ㉡조건이다. ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① 필요, 충분

② 필요충분, 필요

③ 필요, 필요

④ 필요충분, 충분

⑤ 충분, 필요

해설

$$(A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Leftrightarrow A - B = \emptyset, B - A = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$$
$$\Leftrightarrow A = B \therefore p \Leftrightarrow q \text{ 이므로}$$

㉠: 필요충분조건

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ 이고 $A = B \Rightarrow A \subset B$ (역은 성립하지 않는다.)

$\therefore q \Rightarrow r$ 이므로 ㉡: 충분조건

8. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}ab,$ A(3, 2)

는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 위의 점이므로

$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$

양변을 제곱하면 $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서 $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

9. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다.
B: A의 말은 진실이다.
C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

- ① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

- (i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.
(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.
(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.
따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

10. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 가 성립할 때, 실수 c 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$a + b + c = 2 \Rightarrow a + b = 2 - c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 - c^2$$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$2(4 - c^2) \geq (2 - c)^2$$

$$8 - 2c^2 \geq 4 - 4c + c^2$$

$$3c^2 - 4c - 4 \leq 0$$

$$(c - 2)(3c + 2) \leq 0,$$

$$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$$

$$\therefore c \text{의 최댓값 : } 2, \text{ 최솟값 : } -\frac{2}{3}$$

$$\text{합 : } 2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$