

1. 다음 중 명제를 모두 고르면?

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| ㉠ $2 + 2 = 4$   | ㉡ $x + 8 = x - 5$ |
| ㉢ $3x - 1 = 10$ | ㉣ $x + 2x > 6$    |

- ① ㉠                      ② ㉡                      ③ ㉠, ㉡                      ④ ㉡, ㉢                      ⑤ ㉢, ㉣

해설

명제는 참, 거짓이 명확해야 한다.  
㉠ 참, ㉡ 거짓  
㉢, ㉣ 미지수  $x$  의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하므로 명제가 아니다.

2. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 4는 12의 약수이다.

②  $x + y = 10$  이다.

③  $|-3| = -3$

④  $x = 2$  일 때,  $x - 1 > 0$

⑤  $x$ 는 무리수이다.

해설

① 참, ③ 거짓, ④ 참  
따라서 명제는 ①, ③, ④

3. 다음 중 명제가 아닌 것을 모두 고르면?

- ① 무궁화 꽃은 아름답다.
- ② 한국의 수도는 서울이다.
- ③  $1 + 2 < 5$
- ④  $x + 1 = 4$
- ⑤ 대학에 가고 싶다.

해설

①, ⑤ 감탄문, 희망사항, 명령, 주관적인 견해 등은 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다. ②, ③ 참인 명제이다. ④  $x = 3$ 인 경우는 참이지만  $x \neq 3$ 인 경우는 거짓이다. 따라서  $x$ 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

4.  $a > b > 0$  일 때, 다음  $2a + b$ ,  $a + 2b$  의 대소를 비교하면?

①  $2a + b < a + 2b$

②  $2a + b \leq a + 2b$

③  $2a + b > a + 2b$

④  $2a + b \geq a + 2b$

⑤  $2a + b = a + 2b$

해설

$$(2a + b) - (a + 2b) = a - b > 0$$

$$\therefore 2a + b > a + 2b$$

5. 명제  $p \rightarrow q$  가 참일 때, 조건  $p$  를 만족시키는 집합  $P$  와 조건  $q$  를 만족시키는 집합  $Q$  사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

①  $Q \subset P$

②  $Q^c \subset P^c$

③  $Q \subset P^c$

④  $Q^c \subset P$

⑤  $Q = P^c$

해설

명제  $p \rightarrow q$  가 참이면 그 대우  $\sim q \rightarrow \sim p$  도 참이다.  
 $\therefore Q^c \subset P^c$

6. 명제 ‘ $p(x)$ 이면  $q(x)$  이다.’가 참일 때, 두 집합  $P = \{x \mid p(x)\}$ ,  $Q = \{x \mid q(x)\}$  사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

①  $Q \subset P$

②  $Q^c \subset P$

③  $P \subset Q^c$

④  $P \cup Q = P$

⑤  $P \subset Q$

해설

‘ $p(x)$ 이면  $q(x)$  이다.’가 참일 때, 즉,  $p \Rightarrow q$  이면 진리집합의 포함관계는  $P \subset Q$

7. 전체집합  $U$  에서 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$  라 한다.  
 $\sim p \rightarrow \sim q$  가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ①  $P \cup Q = U$
- ②  $P \cap Q = \emptyset$
- ③  $Q \subset P$
- ④  $P \subset Q$
- ⑤  $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$  이 참이면  $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$  이 참이면 대우인  $q \rightarrow p$  가 참  
따라서  $Q \subset P$

8. 다음 중에서 명제 ‘자연수  $n$ 의 각 자리 숫자의 합이 6의 배수이면,  $n$ 은 6의 배수이다.’가 거짓임을 보여주는  $n$ 의 값은?

① 30

② 33

③ 40

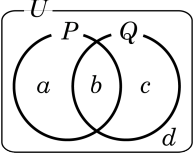
④ 42

⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33의 경우  $3+3=6$ 이지만, 33은 6의 배수가 아니다.

9. 전체집합  $U$  에서 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합  $P, Q$  에 대하여 두 집합  $P, Q$  사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제  $p \rightarrow q$  가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



- ①  $a$       ②  $b$       ③  $c$       ④  $d$       ⑤  $a$ 와  $c$

**해설**

명제  $p \rightarrow q$  가 참이 되려면 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합  $P, Q$  에 대하여  $P \subset Q$  가 성립해야 한다.  $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$ 이면  $x \in Q$   $P$  의 원소  $a$  에 대하여  $a \in P$  이나  $a \notin Q$  이므로  $p \rightarrow q$  는 거짓이다.

10. 명제 ‘ $x$  가 4의 배수가 아니면  $x$  는 2의 배수가 아니다.’는 거짓이다.  
다음 중에서 반례인 것은?

①  $x = 1$

②  $x = 12$

③  $x = 10$

④  $x = 8$

⑤  $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다.  
즉,  $x = 10$  은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

11. 세 수  $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$ ,  $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ ,  $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를  
바르게 나타낸 것은?

①  $A < B < C$

②  $A < C < B$

③  $B < A < C$

④  $C < A < B$

⑤  $C < B < A$

해설

$A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $C > 0$  이므로

$A^2, B^2, C^2$ 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$

$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로  $A^2 > B^2 > C^2$  이다.

따라서  $A > B > C$

12. 다음은 임의의 실수  $a, b$  에 대하여  $|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$  임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$$\begin{aligned} &|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0 \text{ 이므로 } (|a| + |b|)^2, |a + b|^2 \text{ 의 대소를} \\ &\text{비교하면 된다.} \\ &(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가:  $|ab|$ , 나:  $ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $ab$

② 가:  $|ab|$ , 나:  $ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $2ab$

③ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $|ab| - ab$ , 라:  $ab$

④ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $ab$

⑤ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $2ab$

해설

$$\begin{aligned} &(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일때 성립}) \end{aligned}$$

13.  $a > 0$  일 때,  $A = 1 + \frac{a}{2}$ ,  $B = \sqrt{1+a}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ①  $A > B$
- ②  $A < B$
- ③  $A \geq B$
- ④  $A \leq B$
- ⑤  $A = B$

해설

$a > 0$  이므로  $1 + \frac{a}{2} > 0$ ,  $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서  $A^2 > B^2$  이므로  $A > B$  이다.

14.  $a, b$  가 실수일 때, 다음은 부등식  $|a| + |b| \geq |a + b|$  을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ①  $|a| \geq a$   
②  $a \geq b, b \geq c$  이면  $a \geq c$   
③  $|a|^2 = a^2$   
④  $a - b \geq 0$  이면  $a \geq b$   
⑤  $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$  이면  $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \quad (\text{③이 쓰임}) \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \quad (\text{①이 쓰임}) \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \quad (\text{④가 쓰임}) \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \quad (\text{⑤가 쓰임}) \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

15. 다음은 임의의 실수  $a, b$  에 대하여 부등식  $|a+b| \leq |a|+|b|$  가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 } (\quad \text{㉡} \quad), \text{ 즉 } (\quad \text{㉢} \quad) \text{ 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

①  $|ab|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

②  $|ab|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$

③  $|ab|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$

④  $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$

⑤  $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠} : & |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \\ \text{㉡} : & \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\ &\Rightarrow |ab| = ab \\ \text{㉢} : & |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다} \end{aligned}$$

16. 전체집합  $U$ 에 대하여 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하고, 명제 ‘ $p$ 이면  $q$ 이다.’가 거짓임을 보이기 위해 반례를 찾으려고 한다. 다음 중 그 반례가 속하는 집합은?

①  $P - Q$

②  $Q - P$

③  $P \cap Q$

④  $P^c \cap Q^c$

⑤  $Q \cup P^c$

해설

명제  $p \rightarrow q$ 가 거짓이면  $P \not\subset Q$ 이고, 반례는 조건  $p$ 는 만족하지만 조건  $q$ 는 만족하지 않는 것이므로  $x \in P$ 이고  $x \notin Q$ 인  $x$ 가 속하는 집합을 찾으면 된다. 즉, 반례는 집합  $P - Q$ 의 원소 중에서 찾으면 된다.

17. 아래의 두 조건에 대하여 명제  $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「 $p : x$ 는 18의 약수,  $q : x$ 는 12의 약수」

- ① {1, 2, 3, 6}
- ② {6, 12, 9, 8}
- ③ {9, 18}
- ④ {12, 18}
- ⑤ {6, 9, 18}

해설

두 조건  $p, q$ 를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$ 라 하면,  $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ,  $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은  $P - Q = \{9, 18\}$

18. 조건  $p$  를 만족하는 집합을  $P$  라 하고, 조건  $q$  를 만족하는 집합을  $Q$  라 하자. 명제 ‘ $p$  이면  $q$  이다.’ 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

①  $P$       ②  $Q$       ③  $P - Q$       ④  $P^c$       ⑤  $Q^c$

해설

만약 ‘ $p$  이면  $q$  이다.’ 가 참이라면  $P$  의 모든 원소는  $Q$  의 원소이어야 한다. 하지만 ‘ $p$  이면  $q$  이다’ 가 거짓이므로  $P$  의 원소이지만  $Q$  의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

19. 다음 명제 중  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요조건인 것은? ( $a, b, x, y$ 는 실수)

- ①  $p : a > 3, q : a^2 > 9$
- ②  $p : x$ 는 3의 배수,  $q : x$ 는 6의 배수
- ③  $p : x = 1$ 이고  $y = 1, q : x + y = 2$ 이고  $xy = 1$
- ④  $p : |x - 1| = 2, q : x^2 - 2x + 3 = 0$
- ⑤  $p : a < b, q : |a| < |b|$

해설

$q \Rightarrow p$  즉  $Q \subset P$ 인 것을 고른다.  
②  $q : x$ 는 6의 배수  $\Rightarrow p : x$ 는 3의 배수 (참)

20. 다음 중 조건  $p$  가 조건  $q$  의 필요조건인 것은 ? (단,  $x, y, z$  는 모두 실수)
- ①  $p : x > 0, y > 0, \quad q : x + y > 0, xy > 0$
  - ②  $p : x < 1, \quad q : 0 < x < 1$
  - ③  $p : x < 0, \quad q : x + |x| = 0$
  - ④  $p : x > y, \quad q : xz > yz$
  - ⑤  $p : x \geq 1$  이고  $y \geq 1, \quad q : x + y \geq 2$

해설

- ①  $p \rightarrow q, q \rightarrow p$
- ②  $p \nrightarrow q, q \rightarrow p$  (반례 :  $x = -1$  )
- ③  $p \rightarrow q, q \nrightarrow p$  (반례 :  $x = 0$  )
- ④  $z > 0$  일 때,  $z > 0$  일 때,  $p \rightarrow q, q \rightarrow p$   $z \leq 0$  일 때,  $p \nrightarrow q, q \nrightarrow p$
- ⑤  $p \rightarrow q, q \nrightarrow p$

21. 다음 보기에서  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요조건인 것의 개수는?

- ㉠  $p: -1 < x \leq 1, q: |x| < 2$
- ㉡  $p: x+y$ 가 무리수,  $q: x, y$ 가 무리수
- ㉢  $p: x+y$ 가 짝수,  $q: x, y$ 는 짝수
- ㉤  $p: x^2 - x - 2 = 0, q: x = -1$

① 0개      ② 1개      ③ 2개      ④ 3개      ⑤ 4개

해설

- ㉠  $q: |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$  이고  
 $\{x \mid -1 < x \leq 1\} \subset \{x \mid -2 < x < 2\}$  이므로  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.
- ㉡  $x = 2, y = \sqrt{3}$  이면  $x + y$ 가 무리수이지만  $x$ 는 무리수가 아니다.  $\therefore p \not\Rightarrow q$   
 $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$  이면  $x, y$ 는 무리수이지만  $x + y$ 는 무리수가 아니다.  $\therefore p \not\Leftrightarrow q$   
따라서,  $p$ 와  $q$ 는 아무 조건도 아니다.
- ㉢  $x = 3, y = 5$  이면  $x + y$ 는 짝수이지만  $x, y$ 는 홀수이다.  
 $\therefore p \not\Rightarrow q$   
 $x, y$ 가 짝수이면  $x + y$ 도 짝수이다.  $\therefore p \Leftarrow q$   
따라서,  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이다.
- ㉤  $p: x^2 - x - 2 = 0$  에서  $(x - 2)(x + 1) = 0$  이므로  $x = -1$  또는  $x = 2$  이다.  
 $\{x \mid x = -1 \text{ 또는 } x = 2\} \supset \{x \mid x = -1\}$  이므로  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이다.

22. 실수  $x$ 에 대하여  $x+1=0$ 이  $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수  $a$ 의 값은?

① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이  $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면  $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.  
 $x+1=0$ 에서  $x=-1$ 을  $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면  
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$   
 $\therefore a=1$

23. 두 조건  $p : -3 < 4x + 1 < 5$ ,  $q : k < x < h$ 에 대하여  $q$ 가  $p$ 이기 위한 충분조건일 때,  $k$ 의 최솟값을  $a$ ,  $h$ 의 최댓값을  $b$ 라 할 때,  $ab$ 의 값은?

- ①  $-4$       ②  $-3$       ③  $-1$       ④  $2$       ⑤  $3$

해설

$p : -3 < 4x + 1 < 5$ ,  $q : k < x < h$ 에서

$p$ 를 다시 정리해 보면

$p : -1 < x < 1$ 이 된다.

$q$ 가  $p$ 의 범위에 포함되어야 하므로  $h$ 의 최댓값은  $1$ ,  $k$ 의 최솟값은  $-1$ 이 된다.

$a = -1$ ,  $b = 1$

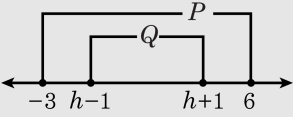
$\therefore ab = -1$

24. 두 조건  $p : |x - h| \leq 1, q : -3 \leq x \leq 6$ 에 대하여  $p$ 가  $q$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수  $h$ 의 개수는?

- ① 4개      ② 5개      ③ 6개      ④ 7개      ⑤ 8개

해설

$P = \{x \mid h - 1 \leq x \leq h + 1\}$   
 $Q = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$   
 $p \rightarrow q(\text{참}) \Rightarrow P \subset Q$



$-3 \leq h - 1, \quad h + 1 \leq 6$   
 $\therefore -2 \leq h \leq 5$   
따라서 정수  $h$ 의 개수는 8개이다.

25. 두 조건  $p(x) : |x - a| \leq 1$ ,  $q(x) : -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5$ 에 대하여  $p(x)$ 가  $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수  $a$ 의 개수는?

- ① 5개      ② 4개      ③ 3개      ④ 2개      ⑤ 1개

해설

두 조건  $p(x)$ ,  $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면  $P = \{x | a - 1 \leq x \leq a + 1\}$ ,  $Q = \{x | -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5\}$   $p(x)$ 가  $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면  $P \subset Q$ 이어야 하므로

( i )  $-1 < a - 1$ 이고  $a + 1 < 2$ ,  
즉  $0 < a < 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

( ii )  $3 \leq a - 1$ 이고  $a + 1 \leq 5$ , 즉  $a = 4 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$ ,  $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서 정수  $a$ 는 4뿐이므로 1개이다.

26.  $x^2 - ax + 6 \neq 0$ 이  $x - 2 \neq 0$ 이기 위한 충분조건일 때,  $a$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$p \rightarrow q \text{ (T)} \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p \text{ (T)}$   
즉, 주어진 명제가 참이면 그 대우도 참  
대우 :  $x = 2 \Rightarrow x^2 - ax + 6 = 0 \text{ (T)}$   
 $\therefore a = 5$

27.  $x + 3 \neq 0$ 이  $x^2 + ax - 6 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$x^2 + ax - 6 \neq 0$ 이면  $x + 3 \neq 0$ 이다.(참)

대우 :  $x + 3 = 0$ 이면  $x^2 + ax - 6 = 0$ 이다.(참)

$x^2 + ax - 6 = 0$ 에  $x = -3$  대입  $\therefore a = 1$

부정문으로 된 명제는 대우를 사용하여 긍정문으로 바꾸면 판단하기가 쉬워진다.

28. 부등식  $2^{50} > 5^{10n}$  을 만족하는 자연수  $n$  의 갯수를 구하여라.

▶ 답 :                        2   개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때  $2^{50} > 5^{10n}$  이므로  $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

$n$  의 갯수는 2 개이다.

29. 부등식  $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 최댓값은?

- ① 4      ② 5      ③ 6      ④ 7      ⑤ 8

해설

$$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{n^2}{27} < 1 \text{ 이므로 } n^2 < 27$$

따라서 자연수  $n$ 의 최댓값은 5이다.

30.  $n$ 이 자연수 일 때,  $2^{10n}$ ,  $1000^n$  의 대소를 비교하면?

- ①  $2^{10n} < 1000^n$       ②  $2^{10n} \leq 1000^n$       ③  $2^{10n} > 1000^n$   
④  $2^{10n} \geq 1000^n$       ⑤  $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$ ,  $1000^n > 0$  이고,  $n$ 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

31. 모든 실수  $x, y$ 에 대하여  $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수  $a, b$ 의 조건은?

①  $a \leq b^2$

②  $b^2 \leq a$

③  $a^2 \leq b$

④  $b \leq a^2$

⑤  $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 에서 양변을  $y^2$ 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수  $x, y$ 에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

32. 모든 실수  $x, y$  에 대하여  $x^2 + 2axy + by^2 = 0$  이 항상 성립하기 위한 실수  $a, b$  의 조건은?

①  $a \leq b^2$

②  $b^2 \leq a$

③  $a^2 \leq b$

④  $b \leq a^2$

⑤  $a^2 = b$

해설

모든 실수  $x$  에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$  이 성립하려면

$$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

이 부등식이 모든  $y$  에 대하여 성립하려면

$$y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

33. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단,  $x, y$  는 실수)

보기

㉠  $x^2 \geq 0$

㉡  $x^3 \geq 0$

㉢  $|x| + |y| > 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다.  $\therefore$  참

㉡ [반례]  $x = -1$  일 때,  $x^3 < 0 \therefore$  거짓

㉢ [반례]  $x = 0, y = 0$  일 때,  $|x| + |y| = 0 \therefore$  거짓

34. 명제 ‘모든 실수  $x$ 에 대하여  $x^2 + 5 \geq k$ 이다.’는 참이고 ‘어떤 실수  $x$ 에 대하여  $x^2 + k \leq 2$ 이다.’는 거짓일 때, 실수  $k$ 의 값의 범위는?

- ①  $-5 \leq k < -2$       ②  $-5 < k \leq -2$       ③  $-2 \leq k < 2$   
④  $2 < k \leq 5$       ⑤  $2 \leq k < 5$

해설

부등식  $x^2 \geq k-5$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하려면  $k-5 \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore k \leq 5 \cdots \text{㉠}$

명제 ‘어떤 실수  $x$ 에 대하여  $x^2 + k \leq 2$ 이다.’가 거짓이므로 그 부정인 명제 ‘모든 실수  $x$ 에 대하여  $x^2 + k > 2$ 이다.’는 참이다. 따라서,  $x^2 > 2-k$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하려면  $2-k < 0$ 이어야 한다.

$\therefore k > 2 \cdots \text{㉡}$

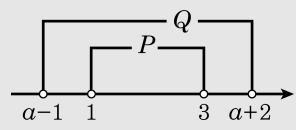
㉠, ㉡으로부터 구하는  $k$ 의 값의 범위는  $2 < k \leq 5$

35.  $1 < x < 3$  을 만족하는 모든 실수  $x$  에 대하여  $a - 1 < x < a + 2$  가 성립할 때, 상수  $a$  의 값의 범위는?

- ①  $1 \leq a \leq 2$       ②  $1 \leq a \leq 3$       ③  $1 < a < 3$   
 ④  $-1 < a < 5$       ⑤  $-1 \leq a \leq 5$

해설

집합  $P = \{x \mid 1 < x < 3\}$ ,  
 $Q = \{x \mid a - 1 < x < a + 2\}$  로 놓으면 모든  $x \in P$  에 대하여  $x \in Q$  이므로  $P \subset Q$  이다. 이를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



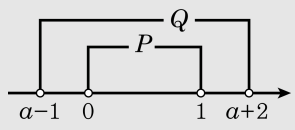
$$a - 1 \leq 1, a + 2 \geq 3$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2$$

36. 명제 ‘ $0 < x \leq 1$  이면  $a - 1 < x < a + 2$  이다.’가 참이 되도록 하는  $a$ 의 값의 범위를 구하면?

- ①  $-2 < a < 1$       ②  $-1 < a < 0$       ③  $-1 < a < 1$   
 ④  $-1 < a \leq 1$       ⑤  $0 < a \leq 2$

해설



$p : 0 < x \leq 1$ ,  $q : a - 1 < x < a + 2$  라 하고, 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$ 라 할 때, 명제  $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면  $P \subset Q$  이어야 한다.

위 그림에서  $a - 1 \leq 0$ ,  $a + 2 > 1$

$a \leq 1$ ,  $a > -1$

$\therefore -1 < a \leq 1$