1. 다음 중 명제를 모두 고르면?

㉠ $2+2=4$	㉡ $x+8=x-5$
㉢ $3x-1=10$	㉣ $x+2x>6$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

명제는 참, 거짓이 명확해야 한다.
㉠ 참, ㉡ 거짓
㉢, ㉣ 미지수 x 의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하므로 명제가 아니다.

2. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 4는 12의 약수이다.

② $x+y=10$ 이다.

③ $|-3|=-3$

④ $x=2$ 일 때, $x-1>0$

⑤ x 는 무리수이다.

해설

① 참, ③ 거짓, ④ 참

따라서 명제는 ①, ③, ④

3. 다음 중 명제가 아닌 것을 모두 고르면?

① 무궁화 꽃은 아름답다.

② 한국의 수도는 서울이다.

③ $1+2<5$

④ $x+1=4$

⑤ 대학에 가고 싶다.

해설

①, ⑤ 감탄문, 희망사항, 명령, 주관적인 견해 등은 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다. ②, ③ 참인 명제이다. ④ $x=3$인 경우는 참이지만 $x\neq 3$인 경우는 거짓이다. 따라서 x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

4. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$

② $2a+b \le a+2b$

③ $2a+b > a+2b$

④ $2a+b \ge a+2b$

⑤ $2a+b = a+2b$

해설

$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$

$\therefore 2a+b > a+2b$

5. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P^c$ ③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$ ⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$\therefore \mathrm{Q}^c \subset \mathrm{P}^c$

6. 명제 '$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P=\{x\mid p(x)\}$, $Q=\{x\mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q\subset P$ ② $Q^c\subset P$ ③ $P\subset Q^c$

④ $P\cup Q=P$ ⑤ $P\subset Q$

해설

'$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.' 가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P\subset Q$

7. 전체집합 U 에서 두 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라 한다. $\sim p \to \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 대우인 $q \to p$ 가 참

따라서 $Q \subset P$

8. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

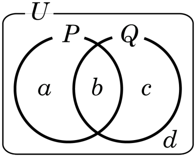
① 30 ② 33 ③ 40

④ 42 ⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

9. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ a와 c

해설

명제 $p \to q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$이면 $x \in Q$ P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \to q$ 는 거짓이다.

10. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$

④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

11. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로
A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$
$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$
$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

12. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
> $= a^2 + \boxed{가} + b^2 - (a^2 + \boxed{나} + b^2)$
> $= 2(\boxed{다}) \geq 0$
> (단, 등호는 $\boxed{라} \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab|-ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

13. $a > 0$ 일 때, $A = 1+\frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$　　② $A < B$　　③ $A \geq B$

④ $A \leq B$　　⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1+\frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > b^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

14. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$$
$$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$$
$$=\ a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$$
$$=\ 2(|ab|-ab)\ 0$$
$$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$$
$$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a-b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$

$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$ (③이 쓰임)

$=a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$

$=2(|ab|-ab) \geq 0$ (①이 쓰임)

$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$ (④가 쓰임)

$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$ (⑤가 쓰임)

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

15. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
$=2($ ㉠ $)\ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b|\ge 0,\ |a+b|\ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab\le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab\ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab\le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab\ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab\le 0$

해설

㉠ : $|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
$=a^2+2|a||b|+b^2-a^2-b^2-2ab$
$=2(|ab|-ab)$
㉡ : 등호는 $|ab|-ab=0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab|=ab$
㉢ : $|ab|=ab$ 이려면 $ab\ge 0$ 이어야 한다

16. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고, 명제 'p 이면 q 이다.' 가 거짓임을 보이기 위해 반례를 찾으려고 한다. 다음 중 그 반례가 속하는 집합은?

① $P-Q$ ② $Q-P$ ③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q^c$ ⑤ $Q \cup P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이고, 반례는 조건 p 는 만족하지만 조건 q 는 만족하지 않는 것이므로 $x \in P$ 이고 $x \notin Q$ 인 x 가 속하는 집합을 찾으면 된다. 즉, 반례는 집합 $P-Q$ 의 원소 중에서 찾으면 된다.

17. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「p : x 는 18 의 약수, q : x 는 12 의 약수」

① $\{1, 2, 3, 6\}$ ② $\{6, 12, 9, 8\}$ ③ $\{9, 18\}$
④ $\{12, 18\}$ ⑤ $\{6, 9, 18\}$

해설

두 조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

18. 조건 p 를 만족하는 집합을 P 라 하고, 조건 q 를 만족하는 집합을 Q 라 하자. 명제 'p 이면 q 이다.' 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

① P　② Q　③ $P-Q$　④ P^c　⑤ Q^c

해설

만약 'p 이면 q 이다.' 가 참이라면 P 의 모든 원소는 Q 의 원소이어야 한다. 하지만 'p 이면 q 이다' 가 거짓이므로 P 의 원소이지만 Q 의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

19. 다음 명제 중 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것은? (a, b, x, y는 실수)

① $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

② $p : x$ 는 3 의 배수, $q : x$ 는 6 의 배수

③ $p : x = 1$ 이고 $y = 1$, $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

④ $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $p : a < b$, $q : |a| < |b|$

해설

$q \Rightarrow p$ 즉 $Q \subset P$인 것을 고른다.
② $q : x$ 는 6 의 배수 $\Rightarrow p : x$는 3의 배수 (참)

20. 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요조건인 것은? (단, x, y, z 는 모두 실수)

① p : $x>0,\ y>0,$ $\quad q$: $x+y>0,\ xy>0$

② p : $x<1,$ $\quad q$: $0<x<1$

③ p : $x<0,$ $\quad q$: $x+|x|=0$

④ p : $x>y,$ $\quad q$: $xz>yz$

⑤ p : $x\geq 1$ 이고 $y\geq 1,$ $\quad q$: $x+y\geq 2$

해설

① $p\rightarrow q,\ q\rightarrow p$

② $p\ \nrightarrow\ q,\ q\ \rightarrow\ p$ (반례 : $x=-1$)

③ $p\ \rightarrow\ q,\ q\ \nrightarrow\ p$ (반례 : $x=0$)

④ $z>0$ 일 때, $z>0$ 일 때, $p\rightarrow q,\ q\rightarrow p$ $z\leq 0$ 일 때, $p\nrightarrow q,$ $q\nrightarrow p$

⑤ $p\rightarrow q,\ q\nrightarrow p$

21. 다음 보기에서 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것의 개수는?

㉠ $p : -1 < x \le 1,\ q : \lvert x \rvert < 2$
㉡ $p : x + y$ 가 무리수, $q : x, y$ 가 무리수
㉢ $p : x + y$ 가 짝수, $q : x, y$ 는 짝수
㉣ $p : x^2 - x - 2 = 0,\ q : x = -1$

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠ $q : \lvert x \rvert < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ 이고
$\{x \mid -1 < x \le 1\} \subset \{x \mid -2 < x < 2\}$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

㉡ $x = 2, y = \sqrt{3}$ 이면 $x + y$ 가 무리수이지만 x 는 무리수가 아니다. $\therefore p \nRightarrow q$
$x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 x, y 는 무리수이지만 $x + y$ 는 무리수가 아니다. $\therefore p \nLeftarrow q$
따라서, p 와 q 는 아무 조건도 아니다.

㉢ $x = 3, y = 5$ 이면 $x + y$ 는 짝수이지만 x, y 는 홀수이다.
$\therefore p \nRightarrow q$
x, y 가 짝수이면 $x + y$ 도 짝수이다. $\therefore p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

㉣ $p : x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x-2)(x+1) = 0$ 이므로 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.
$\{x \mid x = -1 \text{ 또는 } x = 2\} \supset \{x \mid x = -1\}$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

22. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 '$x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.' 가 참이다.

$x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면

$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$

$\therefore a=1$

23. 두 조건 $p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에 대하여 q 가 p 이기 위한 충분조건일 때, k 의 최솟값을 a, h 의 최댓값을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에서
p 를 다시 정리해 보면
$p : -1 < x < 1$ 이 된다.
q가 p의 범위에 포함되어야 하므로 h 의 최댓값은 1, k의 최솟값은 -1 이 된다.
$a = -1$, $b = 1$
$\therefore\ ab = -1$

24. 두 조건 $p : |x-h| \le 1, q : -3 \le x \le 6$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 정수 h의 개수는?

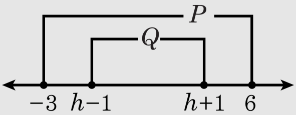
① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$P = \{x \mid h-1 \le x \le h+1\}$

$Q = \{x \mid -3 \le x \le 6\}$

$p \to q$(참) $\Rightarrow P \subset Q$



$-3 \le h-1, \quad h+1 \le 6$

$\therefore -2 \le h \le 5$

따라서 정수 h의 개수는 8개이다.

25. 두 조건 $p(x)$: $|x-a| \le 1$, $q(x)$: $-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

① 5 개　② 4 개　③ 3 개　④ 2 개　⑤ 1 개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x|a-1 \le x \le a+1\}$, $Q = \{x|-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a-1$이고 $a+1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots$ ㉠

(ii) $3 \le a-1$이고 $a+1 \le 5$, 즉 $a = 4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 정수 a는 4뿐이므로 1개이다.

26. $x^2 - ax + 6 \neq 0$이 $x - 2 \neq 0$이기 위한 충분조건일 때, a의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$p \rightarrow q$ (T) $\leftrightarrow$ $\sim q \rightarrow \sim p$ (T)

즉, 주어진 명제가 참이면 그 대우도 참

대우 : $x = 2 \Rightarrow x^2 - ax + 6 = 0$ (T)

$\therefore\ a = 5$

27. $x+3 \neq 0$이 $x^2+ax-6 \neq 0$이기 위한 필요조건일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2+ax-6 \neq 0$이면 $x+3 \neq 0$이다.(참)
대우 : $x+3=0$이면 $x^2+ax-6=0$이다.(참)
$x^2+ax-6=0$에 $x=-3$ 대입 $\therefore a=1$
부정문으로 된 명제는 대우를 사용하여 긍정문으로 바꾸면 판단하기가 쉬워진다.

28. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

29. 부등식 $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$$

$\frac{n^2}{27} < 1$ 이므로 $n^2 < 27$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 5 이다.

30. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

31. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$이 성립하기 위한 실수 a, b의 조건은?

① $a \leq b^2$ ② $b^2 \leq a$ ③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$ ⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$에서 양변을 y^2으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$\therefore a^2 \leq b$

32. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2+2axy+by^2=0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \le b^2$　　② $b^2 \le a$　　③ $a^2 \le b$

④ $b \le a^2$　　⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2+2axy+by^2 \ge 0$ 이 성립하려면

$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2-b)y^2 \le 0$

이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면

$y^2 \ge 0$ 이므로 $a^2-b \le 0$

$\therefore a^2 \le b$

33. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$　　㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x|+|y|>0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. ∴ 참
㉡ [반례] $x=-1$ 일 때, $x^3<0$ ∴ 거짓
㉢ [반례] $x=0,\ y=0$ 일 때, $|x|+|y|=0$ ∴ 거짓

34. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+5 \geq k$ 이다.' 는 참이고 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 2$ 이다.' 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-5 \leq k < -2$ ② $-5 < k \leq -2$ ③ $-2 \leq k < 2$

④ $2 < k \leq 5$ ⑤ $2 \leq k < 5$

해설

부등식 $x^2 \geq k-5$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $k-5 \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k \leq 5 \cdots$ ㉠

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 2$ 이다.' 가 거짓이므로 그 부정인 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+k > 2$ 이다.' 는 참이다.

따라서, $x^2 > 2-k$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $2-k < 0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k > 2 \cdots$ ㉡

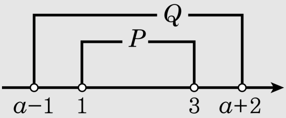
㉠, ㉡으로부터 구하는 k 의 값의 범위는 $2 < k \leq 5$

35. $1 < x < 3$ 을 만족하는 모든 실수 x 에 대하여 $a-1 < x < a+2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $1 \le a \le 2$　② $1 \le a \le 3$　③ $1 < a < 3$
④ $-1 < a < 5$　⑤ $-1 \le a \le 5$

해설

집합 $P = \{x \mid 1 < x < 3\}$,
$Q = \{x \mid a-1 < x < a+2\}$ 로 놓으면 모든 $x \in P$ 에 대하여 $x \in Q$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 이를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



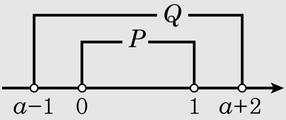
$a-1 \le 1$, $a+2 \ge 3$
$\therefore\ 1 \le a \le 2$

36. 명제 '$0 < x \leq 1$ 이면 $a-1 < x < a+2$ 이다.' 가 참이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < a < 1$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-1 < a < 1$

④ $-1 < a \leq 1$ ⑤ $0 < a \leq 2$

해설



$p : 0 < x \leq 1$, $q : a-1 < x < a+2$ 라 하고, 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다.

위 그림에서 $a-1 \leq 0$, $a+2 > 1$

$a \leq 1$, $a > -1$

$\therefore\ -1 < a \leq 1$