1. 명제 '$2x^2 + ax - 9 \neq 0$ 이면 $x - 3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

대우인 '$x - 3 = 0$이면 $2x^2 + ax - 9 = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$2 \cdot 3^2 + 3a - 9 = 0,\ 3a + 9 = 0$

$\therefore\ a = -3$

2. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2 - ax + 2 \neq 0$에서 $q \to p$가 참일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.
$x-2=0 \Rightarrow x^2 - ax + 2 = 0 \therefore a = 3$

3. 두 실수 x, y에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

$x+y<8$이면 $x<-2$ 또는 $y<k$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
따라서 $x \geq -2$이고 $y \geq k$이면 $x+y \geq 8$
$x \geq -2$, $y \geq k$에서 $x+y \geq k-2$이므로
$k-2 \geq 8$, $\therefore$ $k \geq 10$
따라서 k의 최솟값은 10이다.

4. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $|x-2| > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 '$|x-2| \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.
$|x-2| \le 4$ 에서
$-4 \le x-2 \le 4$, $-2 \le x \le 6$이므로
$\therefore a \ge 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

5. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2-a^2x+2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
'$x=1$ 이면 $ax^2-a^2x+2=0$ 이다.' 가 참이므로
$a-a^2+2=0,\ a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$
$a>0$ 이므로 $a=2$

6. 두 명제 $p \to q$ 와 $r \to \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $p \to r$	㉡ $r \to p$	㉢ $p \to \sim r$
㉣ $q \to \sim r$	㉤ $r \to \sim p$	

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢, ㉤　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

$p \to q$ 가 참이고, 또한 $r \to \sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q \to \sim r$ 가 참 $\therefore p \to q \to \sim r$
즉, $p \to \sim r$, $q \to \sim r$ 가 참이고 또한 $p \to \sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r \to \sim p$ 도 참이다.
따라서 ㉢, ㉣, ㉤이 참이다.

7. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

① $r \Rightarrow p$ ② $\sim p \Rightarrow \sim s$ ③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$ ⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

8. 두 명제「$p \leftrightarrow q$」,「$r \rightarrow \sim q$」가 모두 참일 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $q \rightarrow \sim r$　　② $p \rightarrow \sim r$　　③ $q \leftrightarrow p$

④ $r \rightarrow p$　　⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

① 어떤 명제가 참이면 그 대우는 반드시 참이므로 $r \rightarrow \sim q$ 이면 $q \rightarrow \sim r$ 이다.

② $p \rightarrow q$이고 $q \rightarrow \sim r$ 이면 $p \rightarrow \sim r$ (삼단논법)

③ $p \leftrightarrow q$ 이면 $q \leftrightarrow p$

④ 반드시 $r \leftrightarrow p$ 라고 말할 수는 없다.

⑤ 위의 ② 에서 $p \rightarrow \sim r$ 이면 $r \rightarrow \sim p$

9. $a,\ b,\ c$가 실수일 때, p는 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = b = 0$

② $p : a,\ b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b,\ q : ac = bc$

④ $p : a - 1 = 0,\ q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0,\ q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

p는 q이기 위한 필요충분조건이려면 $p \rightarrow q,\ q \rightarrow p$가 모두 참이어야 한다.

① $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p$

② $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 1,\ b = 3$)

③ $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$)

④ $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = -1$)

⑤ $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 0,\ b = 0$)

10. 다음에서 조건 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (단, a, b, x, y 는 실수)

① $p : a^2 = ab$, $q : a = b$

② $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 - 2x + 3 = 0$

③ $p : 0 < x < 1$, $q : x < 2$

④ $p : xy + 1 > x + y > 2$, $q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : xy > x + y > 4$, $q : x > 2$이고 $y > 2$

해설

① (반례) $a = 0$ 인 경우 필요조건만 성립
② (반례) $x = 3$ 인 경우 명제와 역 모두 성립하지 않는다.
③ (반례) 충분조건은 성립, 역에서는 $x = -1$ 인 경우가 반례이다.
⑤ (반례) $x = 10$, $y = 1.5$ 인 경우 성립하지 않는다.

11. 다음 중 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것은? (단, x, y는 실수)

① $p : x > 0$ 이고 $y > 0$, $q : xy > 0$

② $p : x > 1$, $q : x > 2$

③ $p : x^2 \leq 0$, $q : x = 0$

④ $p : x^2 - x - 2 = 0$, $q : x = 2$

⑤ $p : x + y$는 짝수, $q : x$ 와 y는 짝수

해설

① p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.
②, ④ ,⑤ p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니다.

12. $x,\ y$ 가 실수일 때, 다음 중에서 조건 p가 조건 q 이기 위한 필요충분인 것은 ?

① $p : x+y \geq 2,\ q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : x+y$는 유리수이다., $q : x,\ y$는 유리수이다.

③ $p : xy > x+y > 4,\ q : x > 2$이고 $y > 2$

④ $p : xy+1 > x+y > 2,\ q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0,\ q : xy = 0$

해설

① $p : x+y \geq 2 \Rightarrow q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (반례 : $x=2,\ y=-1$)
② $p : x+y$ 는 유리수이다. $\Rightarrow q : x,\ y$는 유리수이다. (반례 : $x = 1-\sqrt{2},\ y = 1+\sqrt{2}$)
③ $p : xy > x+y > 4 \Rightarrow q : x > 2$ 이고 $y > 2$ (반례 : $x=4,\ y=2$)
④ $p : xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow q : x > 1$ 이고 $y > 1$
⑤ $p : xyz = 0 \Rightarrow q : xy = 0$ (반례 : $x=1,\ y=1,\ z=0$)

13. 다음 보기중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건이 되는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $p : xy > 0$, $q : |x| + |y| = |x + y|$

㉡ $p : xy < 0$, $q : |x| + |y| > |x + y|$

㉢ $p : xy \le 0$, $q : ||x| - |y|| = |x + y|$

㉣ $p : x^2 > y^2$, $q : x^3 > y^3$

㉤ p : 임의의 실수 a 에 대하여 $ax + y = 0$,
q : $|x| + |y| = 0$

① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉢, ㉣　③ ㉡, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉤　⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ (반례) $x = 1$, $y = 0$
㉡은 x 또는 y 가 0 보다 작을 때 $q : |x| + |y| > |x + y|$ 의 식에서 x, y 값이 하나가 음수이므로 우변의 절댓값이 적어지기 때문에 성립하고 역 역시 성립한다.
㉢에서는 위의 조건 p 에서 0 과 같은 경우가 추가되는데, 이는 한 가지 수가 음수이므로 그 수들의 차와 절댓값을 붙인 수가 양변에 같게 된다. 따라서 성립한다.
㉣ (반례) $x = -3$, $y = 1$
㉤ 조건 p, q 모두 $x = 0$ 이고 $y = 0$

14. 두 실수 a, b에 대하여 두 등식 $a+b=|a+b|$, $|a+b|=|a|+|b|$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $a+b \geq 0$ ② $a \geq 0$이고$b \geq 0$

③ $a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$ ④ $ab \geq 0$

⑤ $ab \leq 0$

해설

$a+b=|a+b|, |a+b|=|a|+|b| \Rightarrow a+b=|a|+|b|$
$\therefore a \geq 0$이고$b \geq 0$

15. 우성, 동건, 정재는 전교 3등 안에 드는 학생들이다.

㉠ 우성 : 나는 전교 1등이 아니야
㉡ 동건 : 나는 2등이 아니야.
㉢ 정재 : 나는 2등이야.

위의 주장 중 하나만 참이라 할 때, 전교1, 2, 3등을 차례대로 적으면?

① 동건, 정재, 우성
② 정재, 동건, 우성
③ 우성, 동건, 정재
④ 정재, 우성, 동건
⑤ 동건, 우성, 정재

해설

우성이의 주장이 참이라고 가정하면, 동건이와 정재의 주장은 거짓이 된다.
따라서, 우성-전교 1등이 아님, 동건-전교 2등, 정재-전교 2등이 아니다.
이상에서 우성이는 전교 1등이 아닌데, 동건이가 2등이므로 당연히 3등이 되고, 남은 정재가 전교 1등이 된다. 즉, 모순이 없으므로 정재, 동건, 우성이 각각 1, 2, 3 등이다.(동건의 주장이 참이라면 우성, 정재가 거짓이 되는데, 이 경우 정재가 2등이 되어 참을 말한 것이 되므로 모순이다. 또한, 정재가 참이라면 우성, 동건이 거짓이 되어야 하는데, 동건이가 참을 말한 결과가 되므로 모순이다.)

16. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

17. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다. ㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.

② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.

③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.

④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다.$p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$에서 대우명제도 참이므로$\sim q \Rightarrow \sim p$에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.'$\sim r \Rightarrow \sim p$에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

18. x, y가 실수일 때. $|x|+|y|=|x+y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy=0$ ② $xy>0$ ③ $xy\geq 0$
④ $xy<0$ ⑤ $xy\leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2+y^2+2|xy|=x^2+y^2+2xy$
$\therefore$ $|xy|=xy$ 가 성립하려면 $xy\geq 0$ 일 때이다.

19. 다음에서 조건 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : x = 0$이고 $y = 0$, $q : xy = 0$

② $p : x^2 = 9$, $q : x = 3$

③ $p : x, y$는 모두 짝수, $q : x + y$는 짝수

④ $p : x \neq 0$이고 $y \neq 0$, $q : xy \neq 0$

⑤ $p : x$는 유리수, $q : x^2$ 은 유리수

해설

① $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 0,\ y = 1$)
② $p \rightarrow q$: 거짓 ($x^2 = 9$ 이면 $x = \pm 3$)
③ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 1,\ y = 3$ 이면 $x + y = 4$)
④ 필요충분조건
⑤ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = \sqrt{2}$ 이면 $x^2 = 2$)

20. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, x, y는 임의의 실수)

㉠ $p : x^2 \leq 0$ $q : x = 0$
㉡ $p : x^2 + y^2 = 0$ $q : xy = 0$
㉢ $p : a, b$는 유리수 $q : a + b, ab$는유리수

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ($\because$ x 가 실수이다.)
㉡ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1$ $\therefore$ 충분조건이다
㉢ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$
$\therefore$ 충분조건이다.

21. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$　② $P \cap Q = Q$　③ $P \cap Q = P$
④ $P^c = Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \to \sim q$이고, 대우 $q \to p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

22. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P-Q=\varnothing$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P-Q=\varnothing$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

23. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 P, Q 가 조건 p, q를 만족하는 집합이라고 하자. 조건 p가 'x는 소수' 이고 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 집합 Q의 원소가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① 2　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$U = \{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$, $P \subset U$, $Q \subset U$ 이고 조건 p가 'x는 소수' 이므로 $P = \{2, 3, 5, 7\}$

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

따라서, 집합 P의 원소가 아닌 것은 집합 Q의 원소가 될 수 없다.