1. 실수의 집합에서 실수의 집합으로의 함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어질 때 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 를 차례대로 구하여라.

$$f(x) = 2x + 1$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 5

해설

다음 요령에 따르면 된다.

$f(0) = 2\times 0+1 = 1$, $f(1) = 2\times 1+1 = 3$, $f(2) = 2\times 2+1 = 5$

2. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

3. 세 함수 $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = |x+5|$에 대하여 $(h \circ g \circ f)(1)$의 값은?

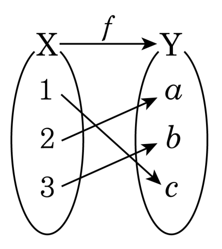
① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -8$ 이므로

$$(h \circ g \circ f)(1) = (h \circ (g \circ f))(1)$$
$$= h((g \circ f)(1)) = h(-8) = |-8+5|$$
$$= 3$$

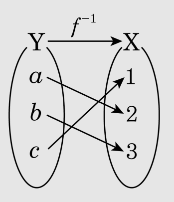
4. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a)+f^{-1}(c)$의 값은 얼마인가?



① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

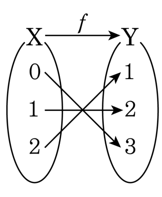
해설

역함수 f^{-1}는 그림과 같으므로



$f^{-1}(a)+f^{-1}(c)=2+1=3$

5. 다음 그림의 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?



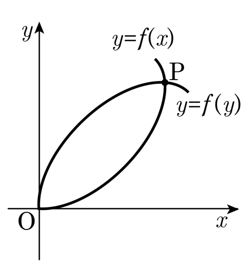
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2) = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, \quad f^{-1}(2) = 1$

$\therefore \ f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 2 + 1 = 3$

6. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?



① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$　　② $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

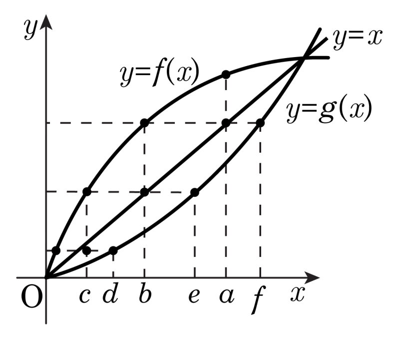
③ $(1,\ 2)$　　④ $(2,\ 2)$

⑤ $(2,\ 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로
$(2,\ 2)$ 이다.

7. 다음 그림은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프이다. 이때, $(f\circ f\circ g)^{-1}(a)$의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f\circ f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}\cdots\cdots$㉠이고

$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$에서 $k=b$

$\therefore\ f^{-1}(a)=b\cdots\cdots$㉡

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$에서 $l=c$

$\therefore\ f^{-1}(b)=c\cdots\cdots$㉢

$g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$에서 $m=d$

$\therefore\ g^{-1}(c)=d\cdots\cdots$㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ g)^{-1}&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\&=g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]\\&=g^{-1}\{f^{-1}(b)\}=g^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

8. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$f(x) = \begin{cases} 0 & (x\text{는 유리수}) \\ \sqrt{2} & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{는 유리수}) \\ \sqrt{3} & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 일 때, $(g \circ f)(\pi)$의 값은 얼마인가?.

① 0　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$

④ 1　　⑤ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

해설

$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}$

9. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로

$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서

$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$\therefore\ x=5,\ -1$

즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.

$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

10. f : X $\to$ Y, $x \to f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$
② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$
④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

11. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h\circ g)(x)=3x+4$, $f(x)=x^2$ 일 때, $(h\circ(g\circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(2)&=((h\circ g)\circ f)(2)\\&=(h\circ g)(f(2))\\&=(h\circ g)(4)\\&=3\times4+4=16\end{aligned}$$

12. 두 함수 $f(x)=-3x+k$, $g(x)=2x+4$에 대하여, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하도록 하는 k의 값은 얼마인가?

① -16　② -14　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$f(x)=-3x+k,\ g(x)=2x+4$에서

$$(f\circ g)(x)=f(2x+4)=-3(2x+4)+k$$
$$=-6x-12+k\cdots ㉠$$
$$(g\circ f)(x)=g(-3x+k)=2(-3x+k)+4$$
$$=-6x+2k+4\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$-6x-12+k=-6x+2k+4$$
$$\therefore k=-16$$

13. 함수 $y = |x-1|-2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

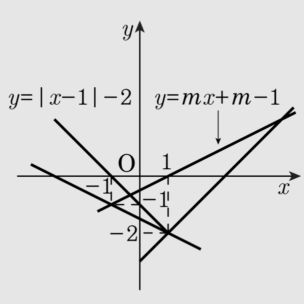
① $-1 < m < 0$　② $-\frac{1}{2} < m < 1$　③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

④ $0 < m < 1$　⑤ $1 < m < 2$

해설

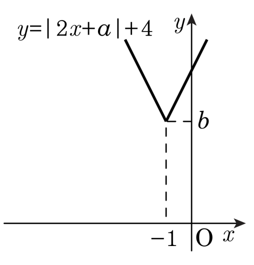
$y = |x-1|-2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺽인 그래프이다.

또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x+1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.



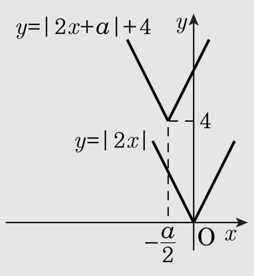
따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$

14. 함수 $y=|2x+a|+4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1,b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a,b 의 곱 ab 의 값을 구하면?



① 2　　② 4　　③ 6
④ 8　　⑤ 10

해설



$y=|2x+a|+4$

$=\left|2\left(x+\frac{a}{2}\right)\right|+4$

즉, 함수 $y=|2x+a|+4$ 의 그래프는 함수 $y=|2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2},4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1,b)$ 이므로

$-\frac{a}{2}=-1,\ b=4$

$\therefore\ a=2,\ b=4 \qquad \therefore\ ab=8$

15. 함수 $f(x) = || x-1 | -a |$ 에서 $f(2) = 4$ 를 만족시키는 양의 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(2) = 4$ 이므로

$f(2) = || 2-1 | -a | = 4 \rightarrow | 1-a | = 4$

따라서 $a = -3, 5$ 이므로 양수 $a = 5$

16. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

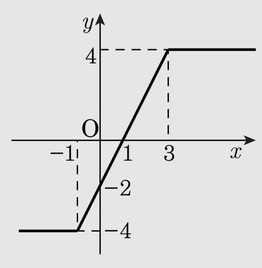
ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \geq 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x - 3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

17. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, $g(x) = -2$일 때, $f(4) + g(-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

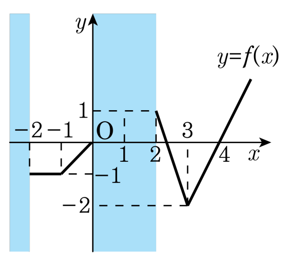
$f(x)$는 항등함수이므로

$f(x) = x$에서 $f(4) = 4$,

$g(x) = -2$에서 $g(-1) = -2$

$\therefore\ f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

18. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



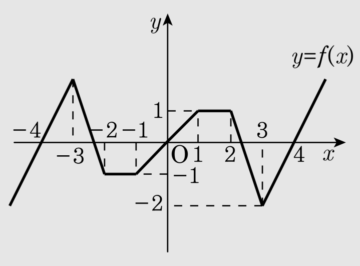
$-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로



$-4 \le x \le -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \le x \le 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

19. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \le x \le 2$) 의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

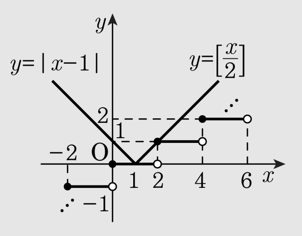
$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ $\therefore y = x + 1$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ $\therefore y = x$
$1 \le x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ $\therefore y = x - 1$
$x = 2$ 일 때, $[x] = 2$ $\therefore y = 0$
따라서, $y = x - [x]$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

20. 두 함수 $y = | x - 1 |$, $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = | x - 1 |$ 과 $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y = | x - 1 |$ 과 $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ −1 ④ −2 ⑤ −3

해설

$f(2)=\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$

$=\dfrac{1+3}{1-3}=-2$

$f(3)=\dfrac{1+f(2)}{1-f(2)}$

$=\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$

$f(4)=\dfrac{1+f(3)}{1-f(3)}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

$f(5)=\dfrac{1+f(4)}{1-f(4)}$

$=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

22. 두 집합 $X = \{1,\ 2\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 2 개　　② 5 개　　③ 10 개

④ 20 개　　⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,

$f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.

즉, $X = \{1,\ 2\}$ 이고 $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 이므로

일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 5 가지

$f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4 가지

$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(개)

23. 두 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개　② 20 개　③ 25 개　④ 27 개　⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

24. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 일 때, $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$ ② $2x-2$ ③ $4x-2$
④ $6x-3$ ⑤ $8x-3$

해설

$\frac{3x+1}{2}=t$ 라 하면 $2t=3x+1$

$\therefore x=\frac{2t-1}{3}$

$f\left(\frac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 에서

$f(t)=6\cdot\frac{2t-1}{3}-5=4t-7$

$\therefore f(2x+1)=4(2x+1)-7=8x-3$

25. 함수 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$f(-2)=\dfrac{6+1}{-2+3}=7$

$f^2(-2)=f(f(-2))=f(7)=-2$

$f^3(-2)=f(f^2(-2))=f(-2)=7$

$f^4(-2)=f(f^3(-2))=f(7)=-2$

$\vdots$

$f^{2006}(-2)=-2$

$f^{2007}(-2)=7$

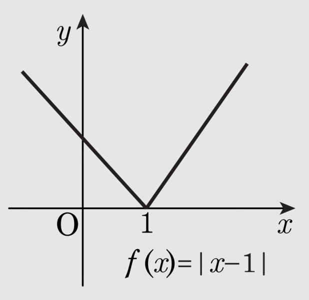
$\therefore\ f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)=-2+7=5$

26. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x의 합을 구하면?

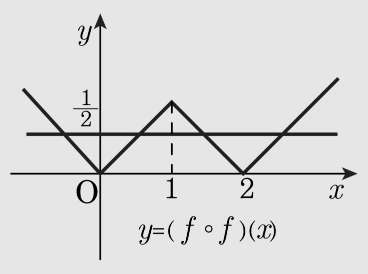
① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프와 $y=\frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$

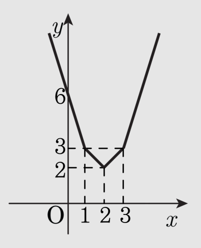
27. 함수 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 $m,\ n$ 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 에서
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x-1+x-2+x-3 = 3x-6$
(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x-1+x-2-(x-3) = x$
(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2)-(x-3) = -x+4$
(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)-(x-2)-(x-3) = -3x+6$
따라서 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2,\ n = 2$
$\therefore mn = 4$