

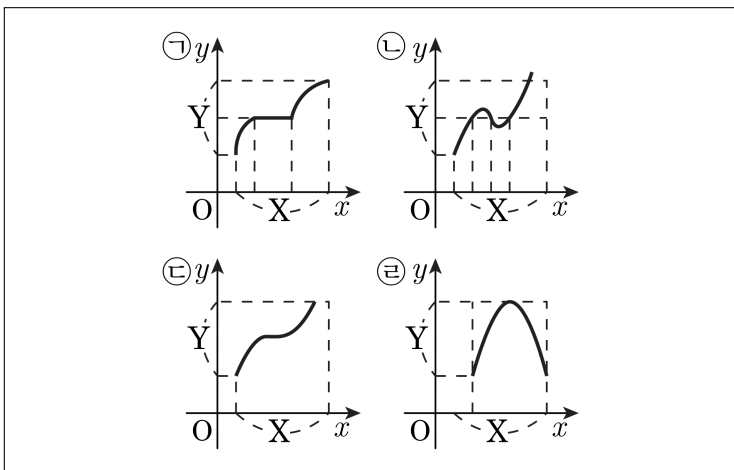
1. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

- ① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

2. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉣

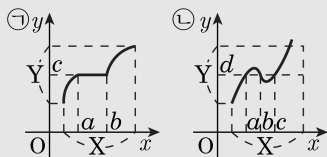
③ ㉢

④ ㉠

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으려면 된다.



㉠ : $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.

㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉢ : ㉡의 경우와 같다.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ -2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$ 의 값은 얼마인가?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = (f \circ f)^{-1}(4) = a$ 라 놓으면,

$$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = 4$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 \text{ 이므로 } f(a) = -2$$

$$\text{또, } f(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\therefore a = 1$$

4. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1 \quad (\because f(2) = 3)$$

함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

5. $f : x \rightarrow x + 3$, $g : x \rightarrow 3x + 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x - 4$

② $h(x) = x - 9$

③ $h(x) = x - 6$

④ $h(x) = 2x - 3$

⑤ $h(x) = 2x - 6$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(x + 3) = 3(x + 3) + 1 \\ = 3x + 10 \text{ 이므로}$$

$$(h \circ g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(3x + 10) = 3x + 1$$

$$3x + 10 = t \text{ 라 하면 } 3x = t - 10$$

$$\therefore h(t) = (t - 10) + 1 = t - 9$$

$$\therefore h(x) = x - 9$$

6. 함수 $y = \sqrt{a-2x} + 1$ 의 역함수가 점 $(5, -2)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 12$

해설

역함수가 점 $(5, -2)$ 를 지나므로
원함수는 점 $(-2, 5)$ 를 지나게 된다.
따라서 $5 = \sqrt{a+4} + 1$
 $\therefore a = 12$

7. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = -x + 7$

㉡ $f(x) = \frac{3}{2}x$

㉢ $f(x) = -\frac{2}{x}$

㉣ $f(x) = x - 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x$

㉡ $(f \circ f)(x) = \frac{9}{4}x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉣ $(f \circ f)(x) = x - 2$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉠, ㉢이다.

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여 $f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_n(x)$ (x 은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은?
(단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n 개)

① 2007

② 2008

③ 2009

④ 4015

⑤ 4016

해설

$$f(x) = x + 2$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x + 2) + 2 = x + 4$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = (x + 4) + 2 = x + 6$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = (x + 6) + 2 = x + 8$$

$\vdots$

$$f^n(x) = x + 2n$$

$$\therefore f^{2007}(1) = 1 + 2 \times 2007 = 4015$$

9. 두 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

10. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2 (\because a \text{는 자연수})$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$