

1. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

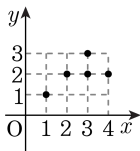
⑤ 4

해설

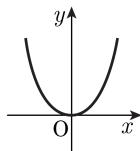
정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 다음 그래프 중에서 함수의 그래프는?

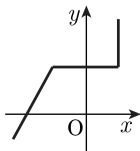
①



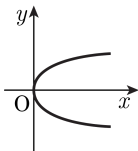
②



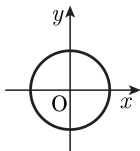
③



④



⑤

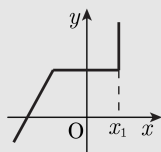


해설

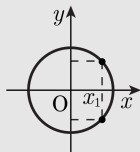
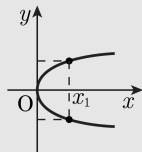
X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응되어야 한다.

① $f(3) = 2, f(3) = 3$ 이므로 함수가 아니다.

③ x_1 에 대응하는 y 의 값이 무수히 많으므로 함수가 아니다.



④, ⑤ x_1 에 대응하는 y 의 값이 2개이므로 함수가 아니다.



3. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$ (x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$$\therefore f(2) = 2$$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$$\therefore g(4) = -3$$

$$\therefore f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1 \text{ 이다.}$$

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

5. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x+1) = f(x+3)$ 으로 정의될 때 $g(0) + g(2)$ 의 값은?

① 34

② 45

③ 57

④ 62

⑤ 67

해설

$$g(x+1) \text{ 에서 } x = -1 \text{ 일 때, } g(0) = f(2)$$

$$g(x+1) \text{ 에서 } x = 1 \text{ 일 때, } g(2) = f(4)$$

$$\begin{aligned}\therefore g(0) + g(2) &= f(2) + f(4) \\ &= 2^3 - 2 \times 2 + 1 + 4^3 - 2 \times 4 + 1 = 62\end{aligned}$$

6. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & (x \geq 1) \\ 2x - a & (x \leq 1) \end{cases} \text{로 정의될 때,}$$

$f(2 - \sqrt{3}) - f(\sqrt{3})$ 의 값은?

① $3 - 3\sqrt{3}$

② $2 - 2\sqrt{3}$

③ $1 - \sqrt{3}$

④ $-1 + \sqrt{3}$

⑤ $-3 + 3\sqrt{3}$

해설

$x = 1$ 에서 함숫값이 1개이어야 하므로

$$-1 + 1 = 2 - a$$

$$\therefore a = 2$$

$2 - \sqrt{3} < 1$, $\sqrt{3} > 1$ 이므로

$$f(2 - \sqrt{3}) = 2(2 - \sqrt{3}) - 2 = -2\sqrt{3} + 2$$

$$f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 1$$

$$\therefore f(2 - \sqrt{3}) - f(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} + 2 - (-\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3}$$

7. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 가 $f(-x) = -f(x)$ (단, $x \in X$)를 만족한다. $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때, $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = -f(0), 2f(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

또, $f(-1) = -f(1)$, $f(-2) = -f(2)$ 이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$$-f(2) - f(-1) = 3$$

$$\therefore f(2) + f(-1) = -3$$

$$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$$

$$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$$

8. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f 가 $f(1) = -2$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

① $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

② $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \dots\dots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

9. 집합 $X = \{-1, 1, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(-1) = 1 + k$$

$$f(1) = -1 + k$$

$$f(3) = -3 + k$$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$$\therefore X = \{1 + k, -1 + k, -3 + k\}$$

그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로

$$X = \{-1, 1, 3\} \text{ 에서}$$

$$-3 + k = -1, -1 + k = 1, 1 + k = 3$$

$$\therefore k = 2$$

10. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가

$f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면

-1 이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 0, 1, 2 의 5 가지.

0 이 대응할 수 있는 원소는

$f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,

즉 0 의 1 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지

따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

11. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 6 가지

④ 8 가지

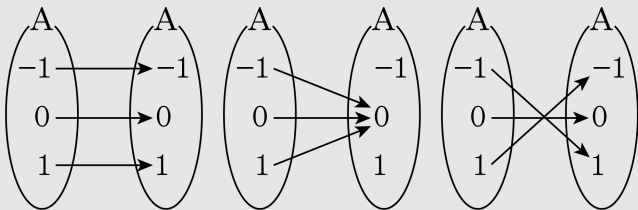
⑤ 9 가지

해설

$$f(-0) = -f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{㉡}$$



㉠, ㉡을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

12. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개

② 5 개

③ 7 개

④ 9 개

⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$

(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면

$$x = -1 \text{ 일 때, } -f(-1) = k$$

$$x = 0 \text{ 일 때, } 0 \cdot f(0) = k$$

$$\therefore k = 0$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } f(1) = k \text{ 에서}$$

$$f(-1) = f(1) = 0 \text{ 임을 알 수 있다.}$$

따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가

상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는

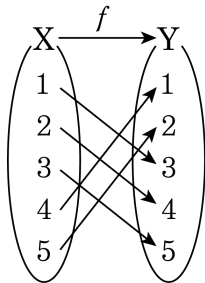
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는

$-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지

$$\therefore 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ (개)}$$

13. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 두 함수 $f : X \rightarrow X, g : X \rightarrow X$ 가 있다. 함수 f 가 다음 그림과 같이 정의되고 두 함수 f, g 가 $f \circ g = g \circ f$ 를 만족한다. $g(1) = 5$ 일 때, $g(3)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f \circ g = g \circ f$ 이므로 문제의 조건에서 $g(1) = 5$ 이므로

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(5) = 2$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3)$$

$$\therefore g(3) = 2$$

14. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x + 3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x) = -x + 1$

② $k(x) = -x + 2$

③ $k(x) = -x + 3$

④ $k(x) = -x + 4$

⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$$k \circ g = h \text{ 이므로 } (k \circ g) \circ f = h \circ f$$

$$k \circ (g \circ f) = h \circ f$$

$$k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수})$$

$$\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$$

$$\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$$

15. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$

② $y = \frac{1}{4}x - 2$

③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,

$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$

즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x - 1) + b = x$

$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$

$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

16. 함수 $f : x \rightarrow ax + b$ 이고 $f(0) = -3$, $\{f(1) + 1\}^2 = 4$ 일 때 $a + b$ 의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = ax + b \text{ 에서 } f(0) = b = -3$$

$$f(1) = a + b = a - 3, \{f(1) + 1\}^2 = (a - 3 + 1)^2 = 4$$

$$(a - 2)^2 = 4$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } 4$$

$$\therefore a \neq 0 \text{ 이므로 } a = 4$$

$$\therefore a + b = 4 + (-3) = 1$$

17. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

$$(i) f(2x) = f(x) \quad (x = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(ii) f(2x + 1) = 2^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

$$1280 = 2^8 \cdot 5 \text{ 이므로,}$$

$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \dots = f(5)$$

$$= f(2 \cdot 2 + 1) \text{ 이므로,}$$

$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

18. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3

② 6

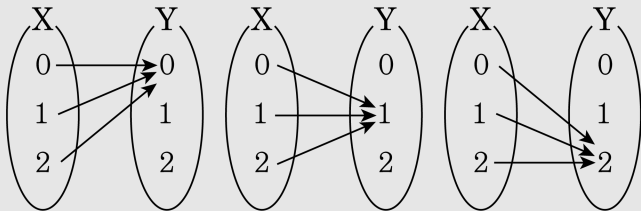
③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

19. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $(f \circ f)(x)$ 의 값은 얼마인가?

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{가 유리수일 때}) \\ 3-x & (x \text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

- ① x ② $3-x$ ③ $x-3$ ④ 0 ⑤ 3

해설

(i) x 가 유리수일 때, $f(x) = x$ 이므로,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$$

(ii) x 가 무리수일 때,

$f(x) = 3-x$ 로 무리수이므로,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (3 - x) = x$$

(i), (ii)에 의하여 $(f \circ f)(x) = x$

20. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.

$$\therefore -2(a-1) > 0$$

$$\therefore a < 1$$

21. 함수 $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{3x+4}{x+1}$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① 3

② $\frac{8}{3}$

③ 6

④ $\frac{13}{2}$

⑤ 7

해설

$$\frac{x+1}{x-2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x+1 = tx-2t, (t-1)x = 2t+1$$

$$\therefore x = \frac{2t+1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{3 \times \frac{2t+1}{t-1} + 4}{\frac{2t+1}{t-1} + 1} = \frac{10t-1}{3t}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

22. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x - 1) = x^2 + 2x - 1$ 을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은 얼마인가?

① -1

② 2

③ 4

④ 7

⑤ 14

해설

$$f(3) = f(2 \cdot 2 - 1) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7$$