

1. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

- ㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
- ㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
- ㉢ 선분과 그 길이의 대응
- ㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
- ㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

- ① ㉠, ㉡, ㉣ ② ㉠, ㉡, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉤

해설

- ㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r 는 오직 하나의 넓이 πr^2 에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $b^2 - 4ac < 0$ 이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2 - 4ac > 0$ 이면 두 개의 대응을 가지므로(서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
- ㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
- ㉤ 특정한 실수 a 를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, ... 등 무수히 많다. 즉, 실수 a 에 a 를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다. 따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

3. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$

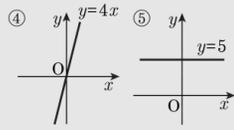
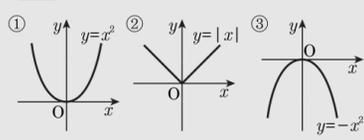
② $f(x) = |x|$

③ $f(x) = -x^2$

④ $f(x) = 4x$

⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

즉, $(a - 1)(b - c) = 0$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

5. 두 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(3x - 7) = f(x + 2)$ 로 정의될 때, $g(-1)$ 의 값은 얼마인가?

- ㉠ 2 ㉡ 3 ㉢ 4 ㉣ 5 ㉤ 6

해설

$$g(3x - 7) = f(x + 2) \text{에 } x = 2 \text{를 대입하면}$$

$$g(-1) = f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$$

6. 함수 f 가 임의의 양수 m, n 에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(2^{2006})$ 의 값은 얼마인가?

- ① 1003 ② 2006 ③ 4012 ④ 2^{1003} ⑤ 2^{2006}

해설

$$\begin{aligned} f(2^{2006}) &= f(2 \times 2 \times \cdots \times 2) \\ &= f(2) + f(2) + \cdots + f(2) \\ &= 2006f(2) = 2006 \end{aligned}$$

7. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$ 는 함수 f 의 치역)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$ 에서
 $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로
 $f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$
 $\therefore 2 \notin f(X)$

8. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

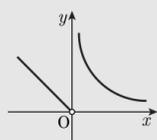
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

- I. $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$
 II. $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
 III. $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① I ② III ③ I, II ④ II, III ⑤ I, III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



I. $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$

$= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>

II.

i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로

$f(-x) = -(-x) = x,$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$

i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

III. 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 I, II 이다.

9. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

자연수; ... , 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, ...
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
정수; ... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

- ① 정수는 무한히 많다.
- ② 자연수는 무한히 많다.
- ③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.
- ④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.
- ⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고 남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응, 즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

10. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면 -1 이 대응할 수 있는 원소는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지.
 0 이 대응할 수 있는 원소는 $f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$, 즉 0 의 1가지
 1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

11. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \emptyset$)

- ① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,

($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \emptyset$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$ (개)

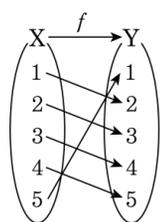
12. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

- ① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

-1이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1의 3가지
0이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1의 3가지
1이 대응할 수 있는 원소는
-1이 대응한 원소 1가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

13. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$
 $\therefore a = 1$

14. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$
④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면
 $h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$
 $\therefore 2a = 4, a + b = -3$
이것을 풀면 $a = 2, b = -5$
따라서 $h(x) = 2x - 5$

15. 두 함수 $f(x) = 3x+2$, $g(x) = -2x+k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

- ① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 3k + 2 &= -6x - 4 + k \\ 2k &= -6 \text{에서 } k = -3\end{aligned}$$

16. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x+1) = f(x+3)$ 으로 정의될 때 $g(0) + g(2)$ 의 값은?

- ① 34 ② 45 ③ 57 ④ 62 ⑤ 67

해설

$$g(x+1) \text{에서 } x = -1 \text{일 때, } g(0) = f(2)$$

$$g(x+1) \text{에서 } x = 1 \text{일 때, } g(2) = f(4)$$

$$\begin{aligned} \therefore g(0) + g(2) &= f(2) + f(4) \\ &= 2^3 - 2 \times 2 + 1 + 4^3 - 2 \times 4 + 1 = 62 \end{aligned}$$

17. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $f(1) = 1$
 ② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$
 ③ $f(a^2) = 2f(a)$
 ④ $f(a^n) = nf(a)$
 ⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x, a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수

18. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

19. 함수 $f(x) = ax$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax) = a(ax) = a^2x = x \text{에서}$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1$$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 함수 $g : Y \rightarrow Z$ 가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$ 를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은 얼마인가?

- ① a ② b ③ c
 ④ b, c ⑤ a, b, c

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이므로
 $f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$ 이어야 한다.
 (i) $f(2) = b$ 인 경우 $f(1) = a$ 이므로 $f(3) = c$
 (ii) $f(2) = c$ 인 경우 $g(c) = 6$ 이므로
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$
 그런데 문제의 조건에서
 $(g \circ f)(2) = 4$ 이므로 모순이다.
 따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$ 이다.

해설

f 와 g 가 일대일대응이면
 $g \circ f$ 도 일대일대응이다.
 $(g \circ f)(2) = 4$ 에서
 $g(f(2)) = 4$ 이므로 $f(2) \neq c$
 또, $f(1) = a$ 이고 f 가 일대일대응이므로
 $f(2) = b$ 이어야 한다.
 $\therefore f(3) = c$

21. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 $f : R \rightarrow R$ 를 $f(x) =$

$$\begin{cases} \pi & (x \text{는 유리수}) \\ 0 & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{으로 정의할 때, 합성함수 } f \circ f \text{의 치역은?}$$

① $\{0\}$

② $\{\pi\}$

③ $\{0, \pi\}$

④ 유리수 전체의 집합

⑤ 실수 전체의 집합

해설

i) x 가 유리수이면 $f(x) = \pi$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\pi) = 0$
ii) x 가 무리수이면 $f(x) = 0$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(0) = \pi$
따라서, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은 $\{0, \pi\}$ 이다.

22. 함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 3$ 을 만족할 때, $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = 2x^2 - 12x + 15$

② $g(x) = -2x^2 + 12x + 15$

③ $g(x) = 2x^2 - 14x + 15$

④ $g(x) = -4x^2 + 14x + 15$

⑤ $g(x) = 4x^2 - 14x + 15$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = x^2 - x + 3$$

$$-\frac{1}{2}x + 2 = t \text{ 라 하면 } x = -2t + 4$$

$$\therefore g(t) = (-2t + 4)^2 - (-2t + 4) + 3 = 4t^2 - 14t + 15$$

$$\therefore g(x) = 4x^2 - 14x + 15$$