1. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |2x - 3|$으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$는 함수 f의 치역)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 5　　⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$에서
$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3,\ f(4) = 5,\ f(5) = 7$ 이므로
$f(X) = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
$\therefore\ 2 \notin f(X)$

2. 두 집합 $X = \{-2,\ -1,\ 0\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

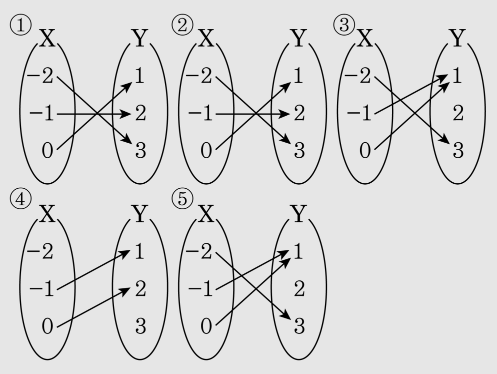
① $f(x) = 1 - x$　　② $f(x) = |x| + 1$

③ $f(x) = x^2 + x + 1$　　④ $f(x) = x^3 + 2$

⑤ $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④ 이다.

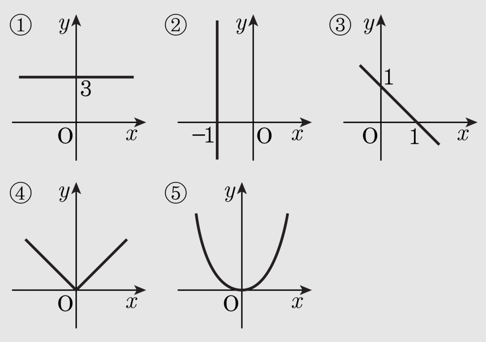
3. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

① $y=3$　② $x=-1$　③ $y=-x+1$

④ $y=|x|$　⑤ $y=x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다.

따라서 만족하는 함수는 ③이다.

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$　　② $a = 1$

③ $b = c$　　④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c)\\ &= a(ax + c) + b\\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$\therefore\ ac + b = ab + c$

즉, $(a - 1)(b - c) = 0$

$\therefore\ a = 1$ 또는 $b = c$

5. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |x-2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\left\{ f(x) | x \in X \right\}$ 의 원소가 <u>아닌</u> 것은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

정의역을 X로 하는 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

6. 자연수 전체의 집합 N에 대하여 함수 $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 을 $f(n) =$ (n의 양의 약수의 개수)로 정의한다. 이 때, 집합 $\mathrm{A} = \{n | f(n) = 2\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in \mathrm{A}$ ② $2 \in \mathrm{A}$ ③ $4 \in \mathrm{A}$

④ $6 \in \mathrm{A}$ ⑤ $10 \in \mathrm{A}$

해설

$f(n) = 2$란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

7. 함수 f가 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(2) = 1$일 때, $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} f(8) &= f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) \\ &= f(2 \cdot 2) + f(2) \\ &= f(2) + f(2) + f(2) \\ &= 3f(2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= f\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2 \cdot 2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = -1$

따라서 $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + (-1) = 2$

8. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$ ② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$ ④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$
$f(a) + f(b) = |a| + |b|$
이 때 $|a+b| \le |a| + |b|$

② $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$
$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$
$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3 + 3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3) \\ f(a) + f(b) &= a^3 + 3a + b^3 + 3b \\ &= a^3 + b^3 + 3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3) \end{aligned}$$

9. $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$, $x \rightarrow f(x)$라 한다. X의 임의의 두 원소를 a, b라 할 때, 다음 중에서 f가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$
② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$
④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

10. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개　　② 6 개　　③ 7 개　　④ 8 개　　⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

11. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$가 있다. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개　② 5 개　③ 7 개　④ 9 개　⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
$x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
$x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
$\therefore\ k = 0$
$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
$\therefore\ 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

12. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x)=3x^2$, $g(x)=x^3+2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개　② 3 개　③ 4 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

$f(x)=g(x)$ 일 때, $f(x)-g(x)=h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) $=$ (집합 X 의 개수)
$x^3+2x-3x^2=0$
$x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)=0$
$x=0,1,2$
x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3-1=7$(개)

13. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x)=ax+b$가 다음 두 조건을 만족한다고 한다.

(가) $(f\circ f)(x)=x$ (나) $f(5)=3$

이때, $f(4)$의 값은 ? (단, $a,\ b$는 상수이다.)

① -3 ② -2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=af(x)+b\\&=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b\end{aligned}$$

$a^2x+ab+b=x$에서 $(a^2-1)x+b(a+1)=0$
이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$a^2=1,\ b(a+1)=0$
(i) $a=1$일 때, $b=0$이므로 $f(x)=x$
이때, $f(5)=5\neq 3$이므로 부적합하다.
(ii) $a=-1$일 때, b는 임의의 실수이므로
$f(x)=-x+b$
이때, $f(5)=-5+b=3$이므로 $b=8$
따라서, $f(x)=-x+8$이므로 $f(4)=4$

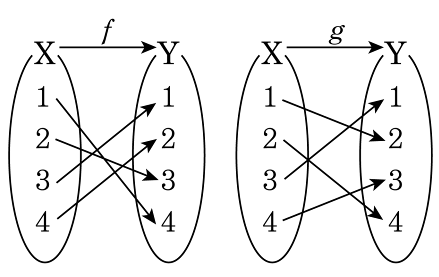
14. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$
④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면
$h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$
$\therefore\ 2a = 4,\ a + b = -3$
이것을 풀면 $a = 2,\ b = -5$
따라서 $h(x) = 2x - 5$

15. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$\therefore\ g \cdot f^{-1}$
$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$
$= h \cdot I = h$
$\therefore\ h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$
$= g(f^{-1}(2))$
$= g(4)(\because\ f^{-1}(2) = 4)$
$\therefore\ g(4) = 3$

16. 자연수 n을 $n = 2^p \cdot k$ (p는 음이 아닌 정수, k는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$이다. 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

㉠ n이 홀수이면 $f(n) = 0$이다.

㉡ $f(8) < f(24)$이다.

㉢ $f(n) = 3$인 자연수 n은 무한히 많다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$에서
㉠ n이 홀수이면, k가 홀수이므로 2^p이 홀수
$\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k는 무수히 많으므로 n도 무수히 많다.

17. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때
$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$
$x = 9,\ y = 3$ 일 때
$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

18. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87　② 88　③ 105　④ 144　⑤ 267

해설

함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.
그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 64$ 가지
일대일 함수 : $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이므로
a 가 선택 가능한 개수 : 4
b 가 선택 가능한 개수 ; 3
c 가 선택 가능한 개수 : 2
이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ 가지
$\therefore\ 64 + 24 = 88$

19. 분수함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(f(x))=x^3$ 을 만족시키는 x 의 값을 모두 구한 것을 고르면?

① -1　　② 0　　③ $-1,\ 0$

④ $0,\ 1$　　⑤ $-1,\ 0,\ 1$

해설

분수함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서

$f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\dfrac{x}{x-(x-1)}=x$

즉, $x=x^3$ 에서 $x^3-x=x(x-1)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 0,\ 1$

그런데 $x\neq 1$ 이므로 구하는 x 의 값은 $-1,\ 0$

20. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$　　② $a > 2$　　③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$　　⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases}$$ 이고

$x \ge 0$ 일 때 $f(x)$는 증가함수이므로
$x < 0$일 때도 $f(x)$는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1 - 2a > 0$

$\therefore\ a < \frac{1}{2}$

21. 두 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 3$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 4$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax - 3) + 6 = 2ax$

$(f \circ g)(1) = 2a = 4$

$\therefore\ a = 2$

22. 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=x+2$ 일 때, $f(x)$ 는 무엇인가?

① $f(x)=x+2$ ② $f(x)=x-2$ ③ $f(x)=2x$
④ $f(x)=2x+1$ ⑤ $f(x)=2x+2$

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=x+2 \quad \cdots$ ㉠에서

$\frac{x+1}{2}=t$라 하면 $x=2t-1$ 이므로

이를 ㉠에 대입하면 $f(t)=2t-1+2=2t+1$

$\therefore\ f(x)=2x+1$