

1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$ 는 함수 f 의 치역)

① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$ 에서

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore 2 \notin f(X)$

2. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

① $f(x) = 1 - x$

② $f(x) = |x| + 1$

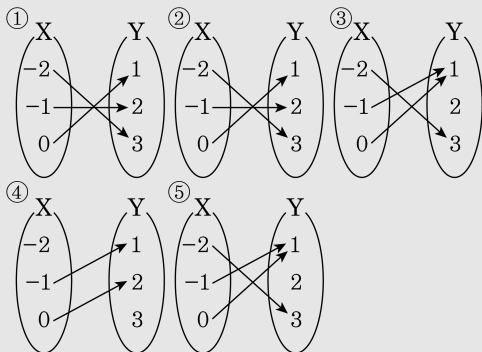
③ $f(x) = x^2 + x + 1$

④ $f(x) = x^3 + 2$

⑤ $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④이다.

3. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

① $y = 3$

② $x = -1$

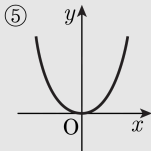
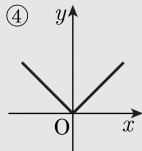
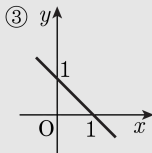
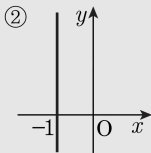
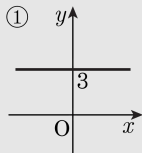
③ $y = -x + 1$

④ $y = |x|$

⑤ $y = x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다.

따라서 만족하는 함수는 ③이다.

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

5. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

6. 자연수 전체의 집합 N 에 대하여 함수 $f : N \rightarrow N$ 을 $f(n) = (n \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의한다. 이 때, 집합 $A = \{n | f(n) = 2\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in A$

② $2 \in A$

③ $4 \in A$

④ $6 \in A$

⑤ $10 \in A$

해설

$f(n) = 2$ 란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

7. 함수 f 가 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}f(8) &= f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) \\&= f(2 \cdot 2) + f(2) \\&= f(2) + f(2) + f(2) \\&= 3f(2) = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(2) &= f\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) \\&= f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\&= f(2 \cdot 2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\&= f(2) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = -1$$

$$\text{따라서 } f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + (-1) = 2$$

8. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$

② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$

④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$

$$f(a) + f(b) = |a| + |b|$$

이 때 $|a+b| \leq |a| + |b|$

② $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$$

⑤ $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$

$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$$

$$f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$$

$$= a^3 + b^3 + 3(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$$

9. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$

② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$

③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$

④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$

⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

10. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개

② 6 개

③ 7 개

④ 8 개

⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는

-1 이 대응한 원소 1 가지

따라서, 주어진 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

11. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개

② 5 개

③ 7 개

④ 9 개

⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$

(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면

$$x = -1 \text{ 일 때, } -f(-1) = k$$

$$x = 0 \text{ 일 때, } 0 \cdot f(0) = k$$

$$\therefore k = 0$$

$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서

$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.

따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가

상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는

원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는

$-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지

$$\therefore 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ (개)}$$

12. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \emptyset$)

① 1 개

② 3 개

③ 4 개

④ 7 개

⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \emptyset$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$

13. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 가 다음 두 조건을 만족한다고 한다.

$$(가) (f \circ f)(x) = x$$

$$(나) f(5) = 3$$

이때, $f(4)$ 의 값은 ? (단, a, b 는 상수이다.)

① -3

② -2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = af(x) + b \\ &= a(ax + b) + b = a^2x + ab + b\end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = x \text{에서 } (a^2 - 1)x + b(a + 1) = 0$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a^2 = 1, b(a + 1) = 0$$

(i) $a = 1$ 일 때, $b = 0$ 이므로 $f(x) = x$

이때, $f(5) = 5 \neq 3$ 이므로 부적합하다.

(ii) $a = -1$ 일 때, b 는 임의의 실수이므로

$$f(x) = -x + b$$

이때, $f(5) = -5 + b = 3$ 이므로 $b = 8$

따라서, $f(x) = -x + 8$ 이므로 $f(4) = 4$

14. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x + 4$

② $h(x) = 2x - 5$

③ $h(x) = 3x + 2$

④ $h(x) = 3x + 5$

⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면

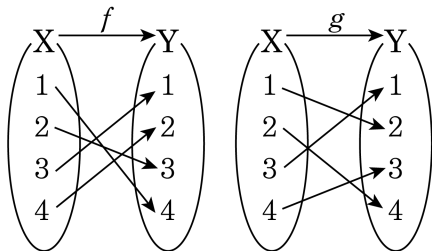
$h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$

$\therefore 2a = 4, a + b = -3$

이것을 풀면 $a = 2, b = -5$

따라서 $h(x) = 2x - 5$

15. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$$\begin{aligned}
 &\therefore g \cdot f^{-1} \\
 &= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1}) \\
 &= h \cdot I = h \\
 &\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2) \\
 &= g(f^{-1}(2)) \\
 &= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4) \\
 &\therefore g(4) = 3
 \end{aligned}$$

16. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ n 이 홀수이면 $f(n) = 0$ 이다.
 ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
 ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서

㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수

$\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$

㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$

$\therefore f(8) = f(24)$

㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$

홀수 k 는 무수히 많으므로 n 도 무수히 많다.

17. 임의의 두 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 이고 $f(3) = 1$ 일 때, $f(27)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = 3, y = 3$ 일 때

$$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$$

$x = 9, y = 3$ 일 때

$$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$$

18. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87

② 88

③ 105

④ 144

⑤ 267

해설

함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.

그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.

$$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ 가지}$$

일대일 함수 : $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이므로

a 가 선택 가능한 개수 : 4

b 가 선택 가능한 개수 : 3

c 가 선택 가능한 개수 : 2

이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.

$$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ 가지}$$

$$\therefore 64 + 24 = 88$$

19. 분수함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(f(x)) = x^3$ 을 만족시키는 x 의 값을 모두 구한 것을 고르면?

① -1

② 0

③ -1, 0

④ 0, 1

⑤ -1, 0, 1

해설

분수함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에서

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\frac{x}{x-1} - 1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x - (x-1)} = x$$

즉, $x = x^3$ 에서 $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore x = -1, 0, 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 구하는 x 의 값은 -1, 0

20. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$ 가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a 의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$

② $a > 2$

③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$

⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고}$$

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$ 는 증가함수이므로

$x < 0$ 일 때도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1 - 2a > 0$

$$\therefore a < \frac{1}{2}$$

21. 두 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 3$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 4$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax - 3) + 6 = 2ax$$

$$(f \circ g)(1) = 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

22. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2$ 일 때, $f(x)$ 는 무엇인가?

① $f(x) = x+2$

② $f(x) = x-2$

③ $f(x) = 2x$

④ $f(x) = 2x+1$

⑤ $f(x) = 2x+2$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2 \quad \dots \textcircled{7} \text{에서}$$

$$\frac{x+1}{2} = t \text{라 하면 } x = 2t-1 \text{ 이므로}$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } f(t) = 2t-1+2 = 2t+1$$

$$\therefore f(x) = 2x+1$$