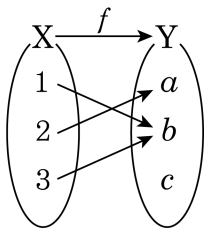


1. 아래 그림은 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 나타낸 것이다. f 의 정의역, 공역, 치역을 순서대로 나열한 것은?



- ① $\{a, b, c\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$

② $\{a, b, c\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}$

③ $\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{a, b\}$

④ $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$

⑤ $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}$



2. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \rightarrow 1$

② $x \rightarrow |x|$

③ $x \rightarrow x^2 + 1$

④ $x \rightarrow 2x$

⑤ $x \rightarrow x^2 + x + 1$

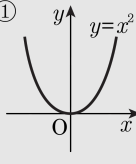
해설

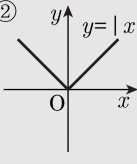
④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

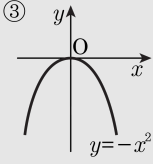
3. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

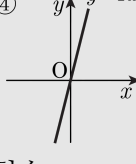
- ① $f(x) = x^2$
- ② $f(x) = |x|$
- ③ $f(x) = -x^2$
- ④ $f(x) = 4x$
- ⑤ $f(x) = 5$

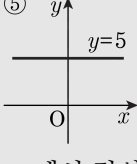
해설

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

4. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

5. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 가 $f(-x) = -f(x)$ (단, $x \in X$)를 만족한다. $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때, $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$f(0) = -f(0)$, $2f(0) = 0$

$\therefore f(0) = 0$

또, $f(-1) = -f(1)$, $f(-2) = -f(2)$ 이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$-f(2) - f(-1) = 3$

$\therefore f(2) + f(-1) = -3$

$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$

$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$

6. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & (x \geq 1) \\ 2x - a & (x \leq 1) \end{cases} \text{로 정의될 때,}$$

$f(2 - \sqrt{3}) - f(\sqrt{3})$ 의 값은?

- ① $3 - 3\sqrt{3}$ ② $2 - 2\sqrt{3}$ ③ $1 - \sqrt{3}$
④ $-1 + \sqrt{3}$ ⑤ $-3 + 3\sqrt{3}$

해설

$x = 1$ 에서 함숫값이 1개이어야 하므로

$$-1 + 1 = 2 - a$$

$$\therefore a = 2$$

$2 - \sqrt{3} < 1$, $\sqrt{3} > 1$ 이므로

$$f(2 - \sqrt{3}) = 2(2 - \sqrt{3}) - 2 = -2\sqrt{3} + 2$$

$$f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 1$$

$$\therefore f(2 - \sqrt{3}) - f(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} + 2 - (-\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3}$$

7. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = |x| + 1$ 의 치역을 구하면?

① $\{1\}$

② $\{1, 2\}$

③ $\{2, 3\}$

④ $\{1, 2, 3\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 4\}$

해설

$x = -2$, 2일 때 $f(x) = 3$

$x = -1$, 1일 때 $f(x) = 2$

$x = 0$ 일 때 $f(x) = 1$

따라서 f 의 치역은 $\{1, 2, 3\}$

8. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$

② $2a + b$

③ $2a + 3b$

④ $3a + b$

⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$

$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$

$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

$$\text{따라서 } 3f(2) + f(3) = 3a + b$$

9. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a , b 의 값을 정하면?

- ① $a = \frac{3}{2}, b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}, b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}, b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}, b = 0$ ⑤ $a = 2, b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

10. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면
 -1 이 대응할 수 있는 원소는
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지.
 0 이 대응할 수 있는 원소는
 $f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,
즉 0 의 1가지
 1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

11. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3$, $f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1$, $f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3$, $f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

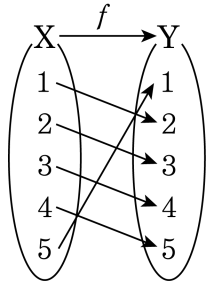
12. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 가 있다. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3개 ② 5개 ③ 7개 ④ 9개 ⑤ 11개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
 $x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
 $x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
 $\therefore k = 0$
 $x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
 $f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5 가지
 1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
 $\therefore 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

13. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$
 $\therefore a = 1$

14. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5
- ② 3
- ③ 1
- ④ -3
- ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

15. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
 $(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x - 1) + b = x$
 $x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
 $x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
 $\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

16. $f(2x-1) = \frac{x-5}{x-1}$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② $\frac{7}{2}$ ③ 0 ④ -5 ⑤ -7

해설

$2x-1 = -1$ 에서 $x = 0$
 $\therefore f(-1) = 5$

17. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $f(1) = 1$
② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$
③ $f(a^2) = 2f(a)$
④ $f(a^n) = nf(a)$
⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x, a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수

18. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수는 $f(x) = 1, f(x) = 2, f(x) = 3$ 의 3개가 있다.

19. $f \circ f$ 를 f^2 , $f \circ f \circ f$ 를 f^3 과 같이 나타낼 때, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 이면 $f^3(2)$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$$

$$\therefore f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$$

$$= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\therefore f^3(2) = 2$$

20. 집합 $X = \{-1, 1, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(-1) = 1 + k$$

$$f(1) = -1 + k$$

$$f(3) = -3 + k$$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$$\therefore X = \{1 + k, -1 + k, -3 + k\}$$

그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로

$X = \{-1, 1, 3\}$ 에서

$$-3 + k = -1, -1 + k = 1, 1 + k = 3$$

$$\therefore k = 2$$

21. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) \begin{cases} x+1 & (x \leq 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

이 때, $g : X \rightarrow X$ 에 대하여 $g(1) = 3$ 이고 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $g(2) < g(3) < g(4)$
- ② $g(2) < g(4) < g(3)$
- ③ $g(3) < g(2) < g(4)$
- ④ $g(3) < g(4) < g(2)$
- ⑤ $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$ 임을 이용하여
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) \ (\therefore f \circ g = g \circ f)$
 $\therefore g(2) = 4$
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$
 $\therefore g(3) = 1$
 $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$
 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$
 $\therefore g(4) = 2$
 $\therefore g(3) < g(4) < g(2)$

22. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-3}{x+3}$ 를 만족할 때, $f(-3) = \frac{a}{b}$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a < b$, a 와 b 는 서로소인 정수)

- ① -2 ② 2 ③ 6 ④ 12 ⑤ 15

해설

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-3}{x+3} \text{ 에서}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = -3 \text{ 이라고 하면 } x-1 = -3(x+1)$$

$$4x = -2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-3) = \frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+3} = -\frac{7}{5}$$

$$a = -7, b = 5 \quad \therefore a+b = -2$$