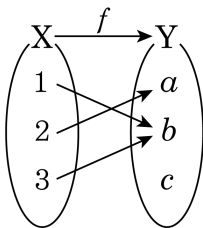


1. 아래 그림은 집합  $X$ 에서 집합  $Y$ 로의 함수  $f : X \rightarrow Y$ 를 나타낸 것이다.  $f$ 의 정의역, 공역, 치역을 순서대로 나열한 것은?



- ①  $\{a, b, c\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$                       ②  $\{a, b, c\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}$   
③  $\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{a, b\}$                       ④  $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$   
⑤  $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}$

해설

2.  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3\}$  일 때,  $x \in X$  인 임의의  $x$ 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

①  $x \rightarrow 1$

②  $x \rightarrow |x|$

③  $x \rightarrow x^2 + 1$

④  $x \rightarrow 2x$

⑤  $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

④  $f(-1) = -2$  이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

3. 다음 중 일대일 함수는? ( $x$  는 모든 실수)

①  $f(x) = x^2$

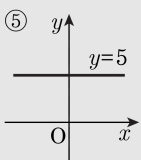
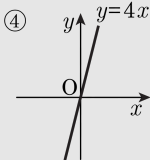
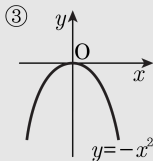
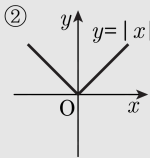
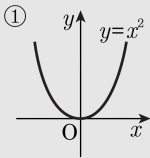
②  $f(x) = |x|$

③  $f(x) = -x^2$

④  $f(x) = 4x$

⑤  $f(x) = 5$

해설



함수  $f: X \rightarrow Y$  에서 정의역  $X$  의  
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

4. 함수  $f(x) = 2x + 6$ ,  $g(x) = ax - 1$ 에 대하여  $f \circ g = g \circ f$ 일 때,  $a$ 의 값은?

①  $\frac{1}{6}$

②  $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

### 해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ &= 2ax + 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ &= 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

5. 집합  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합  $R$ 로의 함수  $f$ 가  $f(-x) = -f(x)$  (단,  $x \in X$ )를 만족한다.  $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때,  $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

### 해설

집합  $X$ 의 임의의 원소  $x$ 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$  이므로  $x = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = -f(0), 2f(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

또,  $f(-1) = -f(1)$ ,  $f(-2) = -f(2)$  이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$$-f(2) - f(-1) = 3$$

$$\therefore f(2) + f(-1) = -3$$

$$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$$

$$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$$

6. 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & (x \geq 1) \\ 2x - a & (x \leq 1) \end{cases} \text{로 정의될 때,}$$

$f(2 - \sqrt{3}) - f(\sqrt{3})$ 의 값은?

①  $3 - 3\sqrt{3}$

②  $2 - 2\sqrt{3}$

③  $1 - \sqrt{3}$

④  $-1 + \sqrt{3}$

⑤  $-3 + 3\sqrt{3}$

해설

$x = 1$ 에서 함숫값이 1개이어야 하므로

$$-1 + 1 = 2 - a$$

$$\therefore a = 2$$

$2 - \sqrt{3} < 1$ ,  $\sqrt{3} > 1$ 이므로

$$f(2 - \sqrt{3}) = 2(2 - \sqrt{3}) - 2 = -2\sqrt{3} + 2$$

$$f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 1$$

$$\therefore f(2 - \sqrt{3}) - f(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} + 2 - (-\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3}$$

7. 집합  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 정의된 함수  $f(x) = |x| + 1$ 의 치역을 구하면?

①  $\{1\}$

②  $\{1, 2\}$

③  $\{2, 3\}$

④  $\{1, 2, 3\}$

⑤  $\{1, 2, 3, 4\}$

해설

$x = -2, 2$ 일 때  $f(x) = 3$

$x = -1, 1$ 일 때  $f(x) = 2$

$x = 0$ 일 때  $f(x) = 1$

따라서  $f$ 의 치역은  $\{1, 2, 3\}$

8. 모든 양수  $m, n$  에 대하여 함수  $f(x)$  는 항상  $f(mn) = f(m) + f(n)$  만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$  일 때  $f(24)$  를  $a, b$  를 써서 나타내면?

①  $a + 2b$

②  $2a + b$

③  $2a + 3b$

④  $3a + b$

⑤  $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$

$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$

$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

$$\text{따라서 } 3f(2) + f(3) = 3a + b$$

9.  $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$  에서  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = ax + b$  (단,  $a > 0$ ) 로 정의되는 함수  $f$  가 일대일 대응이 되도록  $a$ ,  $b$  의 값을 정하면?

- ①  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = 0$       ②  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$       ③  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = 1$   
④  $a = \frac{5}{2}$ ,  $b = 0$       ⑤  $a = 2$ ,  $b = 0$

해설

$f$  가 일대일 대응이고  $a > 0$  이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

10. 두 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  에 대하여  $A$  에서  $B$  로의 함수  $f$  가  $x \in A$  인 모든  $x$  에 대하여  $f(-x) = -f(x)$  를 만족시킬 때, 함수  $f$  의 개수는 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

### 해설

집합  $A$  에서  $B$  로의 함수  $f$  가

$f(-x) = -f(x)$  를 만족시키려면

-1 이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 0, 1, 2 의 5 가지.

0 이 대응할 수 있는 원소는

$f(-0) = -f(0)$  에서,  $2f(0) = 0$  ,

즉 0 의 1 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는  $-f(-1)$  의 1 가지

따라서, 함수  $f$  의 개수는  $5 \times 1 \times 1 = 5$  (개)

11. 집합  $X = \{-2, 0, 2\}$ ,  $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다.  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f : X \rightarrow Y$  중에서  $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수  $f$ 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

### 해설

$f(0) = -f(0)$ 에서  $f(0) = 0$  이고,

1)  $f(-2) = -3, f(2) = 3$

2)  $f(-2) = -1, f(2) = 1$

3)  $f(-2) = 0, f(2) = 0$

4)  $f(-2) = 1, f(2) = -1$

5)  $f(-2) = 3, f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

12. 두 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 가 있다. 함수  $f : X \rightarrow Y$ 가 임의의  $x \in X$ 에 대하여  $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개

② 5 개

③ 7 개

④ 9 개

⑤ 11 개

### 해설

임의의  $x \in X$ 에 대하여  $xf(x) = k$

(단,  $k$ 는 상수)를 만족시킨다고 하면

$$x = -1 \text{ 일 때, } -f(-1) = k$$

$$x = 0 \text{ 일 때, } 0 \cdot f(0) = k$$

$$\therefore k = 0$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } f(1) = k \text{ 에서}$$

$$f(-1) = f(1) = 0 \text{ 임을 알 수 있다.}$$

따라서, 집합  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수 중

임의의  $x \in X$ 에 대하여  $xf(x)$ 가

상수가 되려면  $-1$ 이 대응할 수 있는

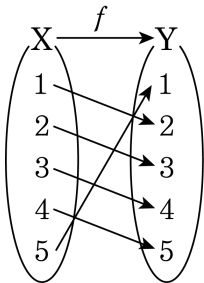
원소  $0$ 의  $1$ 가지  $0$ 이 대응할 수 있는 원소는

$-2, -1, 0, 1, 2$ 의  $5$ 가지

$1$ 이 대응할 수 있는 원소는  $0$ 의  $1$ 가지

$$\therefore 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ (개)}$$

13. 다음 그림과 같이 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수  $f : X \rightarrow X$ 에 대하여  $(f \circ f)(a) = 3$  이 되는  $a$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(f(a)) = 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2$$

$$\therefore a = 1$$

14. 두 함수  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = -4x - 5$  일 때,  $(h \circ f)(x) = g(x)$  를 만족시키는 일차함수  $h(x)$  에 대하여  $(h \circ g)(-2)$  의 값은 얼마인가?

① 5

② 3

③ 1

④ -3

⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$  로 놓으면

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$$

$$= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$$

그런데,  $(h \circ f)(x) = g(x)$  이므로

$$2ax + 3a + b = -4x - 5,$$

$$2a = -4, 3a + b = -5$$

즉,  $a = -2, b = 1$  이므로  $h(x) = -2x + 1$

$$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$  에서

$h(f(x)) = g(x)$  이고  $f(x) = 2x + 3$  이므로

$$h(2x + 3) = g(x)$$

또한,  $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$

$$h(3) = g(0) = -5$$

15. 함수  $f(x) = -x$ ,  $g(x) = 2x-1$  일 때,  $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$  인 일차함수  $h(x)$  를 구하면?

①  $y = \frac{1}{4}x + 2$

②  $y = \frac{1}{4}x - 2$

③  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

⑤  $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$  라고 놓으면,

$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$  에서  $h \circ g = I$

즉  $(h \circ g)(x) = x$ ,  $a(2x-1) + b = x$

$x = 1$  일 때,  $a + b = 1$

$x = 0$  일 때,  $-a + b = 0$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

따라서  $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

16.  $f(2x-1) = \frac{x-5}{x-1}$  일 때,  $f(-1)$  의 값을 구하면?

① 5

②  $\frac{7}{2}$

③ 0

④ -5

⑤ -7

해설

$$2x - 1 = -1 \text{ 에서 } x = 0$$

$$\therefore f(-1) = 5$$

17. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 임의의 양수  $a, b$ 에 대하여  $f(ab) = f(a) + f(b)$  인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

①  $f(1) = 1$

②  $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③  $f(a^2) = 2f(a)$

④  $f(a^n) = nf(a)$

⑤  $x > 1$  일 때,  $f(x) < 0$  이면  $f(x)$ 는 감소함수이다.

### 해설

①  $b = 1$  이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

②  $b = \frac{1}{a}$  이면  $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③  $b = a$  이면  $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여  $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤  $ab = x, a = y$  이면  $b = \frac{x}{y}$  이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때,  $x > y$  이면  $\frac{x}{y} > 1$  이므로  $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서  $f(x) < f(y)$  이므로  $f(x)$ 는 감소함수

18. 두 집합  $X = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 집합  $X = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  
 $X$ 에서  $Y$ 로의 상수함수는

$f(x) = 1$ ,  $f(x) = 2$ ,  $f(x) = 3$ 의 3개가 있다.

19.  $f \circ f$ 를  $f^2$ ,  $f \circ f \circ f$ 를  $f^3$ 과 같이 나타낼 때,  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 이면  $f^3(2)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x$$

$$\begin{aligned}\therefore f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) \\ &= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

$$\therefore f^3(2) = 2$$

20. 집합  $X = \{-1, 1, 3\}$  에 대하여  $X$  에서  $X$  로의 함수  $f(x) = -x + k$  가 일대일 대응일 때, 상수  $k$  의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

### 해설

$$f(-1) = 1 + k$$

$$f(1) = -1 + k$$

$$f(3) = -3 + k$$

이때, 함수  $f$  가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$$\therefore X = \{1 + k, -1 + k, -3 + k\}$$

그런데  $-3 + k < -1 + k < 1 + k$  이므로

$$X = \{-1, 1, 3\} \text{ 에서}$$

$$-3 + k = -1, \quad -1 + k = 1, \quad 1 + k = 3$$

$$\therefore k = 2$$

21. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서  $X$ 로의 함수  $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

이 때,  $g : X \rightarrow X$ 에 대하여  $g(1) = 3$ 이고  $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ①  $g(2) < g(3) < g(4)$                       ②  $g(2) < g(4) < g(3)$   
③  $g(3) < g(2) < g(4)$                       ④  $g(3) < g(4) < g(2)$   
⑤  $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$  임을 이용하여

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) \quad (\because f \circ g = g \circ f)$$

$$\therefore g(2) = 4$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$$

$$\therefore g(3) = 1$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$$

$$\therefore g(4) = 2$$

$$\therefore g(3) < g(4) < g(2)$$

22.  $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-3}{x+3}$  를 만족할 때,  $f(-3) = \frac{a}{b}$  이다. 이 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a < b$ ,  $a$ 와  $b$ 는 서로소인 정수)

① -2

② 2

③ 6

④ 12

⑤ 15

해설

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-3}{x+3} \text{ 에서}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = -3 \text{ 이라고 하면 } x-1 = -3(x+1)$$

$$4x = -2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-3) = \frac{-\frac{1}{2} - 3}{-\frac{1}{2} + 3} = -\frac{7}{5}$$

$$a = -7, b = 5 \quad \therefore a + b = -2$$