

1.  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중  $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단,  $f(X)$ 는 함수  $f$ 의 치역)

① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$ 에서

$f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 3$ ,  $f(4) = 5$ ,  $f(5) = 7$  이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore 2 \notin f(X)$

2. 다음 중 함수가 아닌 것을 고르면?

①  $2y = x - 1$

②  $y = -x^2 - 8$

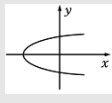
③  $y = 5$

④  $x = y^2 - 4$

⑤  $y = 3|x| - 1$

해설

함수는 하나의  $x$ 값에 두 개 이상의  $y$ 값이 대응될 수 없다.



④ :  $x = y^2 - 4$

3. 다음 중 항등함수를 찾으려면?

- ①  $f(x) = x$                       ②  $f(x) = x + 1$                       ③  $f(x) = x - 1$   
④  $f(x) = x^2$                       ⑤  $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는  $f(x) = x$  또는  $y = x$  이다.

4. 두 함수  $f(x) = ax + b$ ,  $g(x) = ax + c$ 에 대하여  $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

①  $a = 1$  또는  $b = c$

②  $a = 1$

③  $b = c$

④  $a = 0$  또는  $b = c$

⑤  $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

$$\text{마찬가지로 } (g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

5. 집합  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합  $R$ 로의 함수  $f$ 가  $f(-x) = -f(x)$  (단,  $x \in X$ )를 만족한다.  $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때,  $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

①  $-5$

②  $-3$

③  $-1$

④  $1$

⑤  $3$

해설

집합  $X$ 의 임의의 원소  $x$ 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$  이므로  $x = 0$ 을 대입하면

$f(0) = -f(0)$ ,  $2f(0) = 0$

$\therefore f(0) = 0$

또,  $f(-1) = -f(1)$ ,  $f(-2) = -f(2)$  이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$-f(2) - f(-1) = 3$

$\therefore f(2) + f(-1) = -3$

$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$

$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$

6. 두 함수  $f(x), g(x)$ 가  $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ,  $g(x+1) = f(x+3)$ 으로 정의될 때  $g(0) + g(2)$ 의 값은?

① 34

② 45

③ 57

④ 62

⑤ 67

해설

$g(x+1)$ 에서  $x = -1$ 일 때,  $g(0) = f(2)$

$g(x+1)$ 에서  $x = 1$ 일 때,  $g(2) = f(4)$

$\therefore g(0) + g(2) = f(2) + f(4)$   
 $= 2^3 - 2 \times 2 + 1 + 4^3 - 2 \times 4 + 1 = 62$

7. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$ 를  $f(x) = (x^2 \text{을 } 3 \text{으로 나눈 나머지를 } 3 \text{으로 나눈 나머지로 정의할 때, 함수 } f \text{의 치역을 구하면?}$

- ①  $\{0\}$                       ②  $\{1\}$                       ③  $\{0, 1\}$   
④  $\{1, 2\}$                       ⑤  $\{0, 1, 2\}$

해설

모든 정수는  $3k, 3k + 1, 3k + 2$  ( $k$ 는 정수)의 세 가지 중 하나의 꼴로 나타낼 수 있다.

( i )  $x = 3k$  일 때  $x^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$

$\therefore f(x) = 0$

( ii )  $x = 3k + 1$  일 때  $x^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

$\therefore f(x) = 1$

( iii )  $x = 3k + 2$  일 때  $x^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

$\therefore f(x) = 1$

따라서 임의의 정수  $x$ 에 대하여  $x^2$ 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이므로 구하는 치역은  $\{0, 1\}$ 이다.

8. 함수  $f(x)$  는 임의의 두 실수  $a, b$  에 대하여  $f(a+b) = f(a) + f(b)$  를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?
- ①  $f(x) = |x|$

②  $f(x) = -x^2$

③  $f(x) = 3x$

④  $f(x) = 2x + 3$

⑤  $f(x) = x^3 + 3x$

해설

①  $f(a+b) = |a+b|$   
 $f(a) + f(b) = |a| + |b|$   
이 때  $|a+b| \leq |a| + |b|$

②  $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$   
 $f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$

③  $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④  $f(a+b) = 2(a+b) + 3$   
 $f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$

⑤  $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$   
 $\phantom{f(a+b)} = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$   
 $f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$   
 $\phantom{f(a+b)} = a^3 + b^3 + 3(a+b)$   
 $\phantom{f(a+b)} = (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases} \text{가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 } a, b$$

의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

- ①  $a = 1, b = -1$       ②  $a = 1, b = 1$       ③  $a = 2, b = -1$   
 ④  $a = 2, b = 0$       ⑤  $a = -1, b = 2$

**해설**

$f$ 가 일대일대응이 되려면

$y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, 직선  $y = ax + b$ 가

점  $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

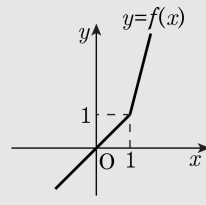
또, 직선  $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선

$y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 주어진 보기 중 ①, ②을

모두 만족시키는 것은 ③이다.



10. 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$  이라 할 때, 함수  $f : A \rightarrow A$  에 대하여  $f(-x) = -f(x)$  를 만족하는 함수  $f$  의 가지수는?
- ① 2 가지                      ② 3 가지                      ③ 6 가지  
④ 8 가지                      ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$   
 $\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$   
 $f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

-1

0

1

①, ②을 만족하는 함수  $f$  는 위의 3 가지뿐이다.

11. 두 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 가 있다. 함수  $f: X \rightarrow Y$ 가 임의의  $x \in X$ 에 대하여  $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는 몇 개인가?

① 3개      ② 5개      ③ 7개      ④ 9개      ⑤ 11개

해설

임의의  $x \in X$ 에 대하여  $xf(x) = k$   
(단,  $k$ 는 상수)를 만족시킨다고 하면  
 $x = -1$ 일 때,  $-f(-1) = k$   
 $x = 0$ 일 때,  $0 \cdot f(0) = k$   
 $\therefore k = 0$   
 $x = 1$ 일 때,  $f(1) = k$ 에서  
 $f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.  
따라서, 집합  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수 중  
임의의  $x \in X$ 에 대하여  $xf(x)$ 가  
상수가 되려면  $-1$ 이 대응할 수 있는  
원소  $0$ 의  $1$ 가지  $0$ 이 대응할 수 있는 원소는  
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의  $5$ 가지  
 $1$ 이 대응할 수 있는 원소는  $0$ 의  $1$ 가지  
 $\therefore 1 \times 5 \times 1 = 5$  (개)

12. 두 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $B$ 로의 함수  $f$ 가  $x \in A$ 인 모든  $x$ 에 대하여  $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수  $f$ 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개      ② 2 개      ③ 3 개      ④ 4 개      ⑤ 5 개

해설

집합  $A$ 에서  $B$ 로의 함수  $f$ 가  
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면  
 $-1$ 이 대응할 수 있는 원소는  
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지.  
 $0$ 이 대응할 수 있는 원소는  
 $f(-0) = -f(0)$ 에서,  $2f(0) = 0$ ,  
즉  $0$ 의 1가지  
 $1$ 이 대응할 수 있는 원소는  $-f(-1)$ 의 1가지  
따라서, 함수  $f$ 의 개수는  $5 \times 1 \times 1 = 5$  (개)

13. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서  $X$ 로의 함수  $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) \begin{cases} x+1 & (x \leq 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

이 때,  $g : X \rightarrow X$ 에 대하여  $g(1) = 3$ 이고  $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ①  $g(2) < g(3) < g(4)$
- ②  $g(2) < g(4) < g(3)$
- ③  $g(3) < g(2) < g(4)$
- ④  $g(3) < g(4) < g(2)$
- ⑤  $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$ 임을 이용하여  
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$   
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) \ (\therefore f \circ g = g \circ f)$   
 $\therefore g(2) = 4$   
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$   
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$   
 $\therefore g(3) = 1$   
 $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$   
 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$   
 $\therefore g(4) = 2$   
 $\therefore g(3) < g(4) < g(2)$

14.  $f(x) = -2x + 3$ ,  $g(x) = 4x + 1$  일 때,  $f \circ g \circ h = g$  를 만족하는 일차함수  $h(x)$  에 대하여  $h(2)$  의 값을 구하면?

①  $-3$

②  $-1$

③  $0$

④  $2$

⑤  $3$

해설

$h(x) = ax + b$  라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ &= -8ax - 8b - 2 + 3 \\ &= 4x + 1\end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

15. 세 함수  $f, g, h$  가  $(g \circ f)(x) = x$ ,  $(h \circ f)(x) = -x + 3$  일 때,  $k \circ g = h$  를 만족시키는 함수  $k(x)$  를 구하면?

- ①  $k(x) = -x + 1$       ②  $k(x) = -x + 2$       ③  $k(x) = -x + 3$   
④  $k(x) = -x + 4$       ⑤  $k(x) = -x + 5$

해설

$k \circ g = h$  이므로  $(k \circ g) \circ f = h \circ f$   
 $k \circ (g \circ f) = h \circ f$   
 $k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수})$   
 $\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$   
 $\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$

16. 임의의 양수  $x, y$  에 대하여 함수  $f$  가  $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$  를 만족하고  $f(2) = 3$  일 때,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  의 값은?

①  $-1$       ②  $-\frac{1}{2}$       ③  $0$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $1$

해설

$$f(xy) = f(x) + f(y) - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에  $x = 1, y = 1$  을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1) - 2$$

$$\therefore f(1) = 2$$

①에  $x = 2, y = \frac{1}{2}$  을 대입하면

$$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

17. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 임의의 양수  $a, b$ 에 대하여  $f(ab) = f(a) + f(b)$  인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ①  $f(1) = 1$   
②  $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$   
③  $f(a^2) = 2f(a)$   
④  $f(a^n) = nf(a)$   
⑤  $x > 1$  일 때,  $f(x) < 0$  이면  $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

①  $b = 1$  이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

②  $b = \frac{1}{a}$  이면  $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③  $b = a$  이면  $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여  $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤  $ab = x, a = y$  이면  $b = \frac{x}{y}$  이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때,  $x > y$  이면  $\frac{x}{y} > 1$  이므로  $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서  $f(x) < f(y)$  이므로  $f(x)$ 는 감소함수

18. 두 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합  $X$ 에서 집합  $Y$ 로의 함수  $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개      ② 27 개      ③ 36 개      ④ 64 개      ⑤ 81 개

해설

집합  $X$ 의 원소  $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는  
집합  $Y$ 의 원소가 각각 4개씩이므로  
 $4 \times 4 \times 4 = 64$ (개)

19. 함수  $f(x) = ax + b(a > 0)$ 에 대하여 합성함수  $(f \circ f)(x) = 4x + 3$ 일 때  $f(1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b\end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = 4x + 3$$

$x$ 에 대한 항등식 이므로  $a^2 = 4, ab + b = 3$

$a > 0$  이므로  $a = 2, b = 1$

$$\therefore f(x) = 2x + 1$$

$$\therefore f(1) = 3$$

20.  $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고,  $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수  $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수  $a$ 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$  또는  $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로  $x \geq 7$ 을 만족하는  $x$ 의 최솟값이  $a$ 가 된다.

$\therefore a = 7$

21. 함수  $f(x) = 2x - a$ 에 대하여  $(f \circ f)(1) = -5$ 일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$f(f(1)) = f(2 - a) = 2(2 - a) - a = 4 - 3a$$

$$(f \circ f)(1) = -5 \text{ 에서 } 4 - 3a = -5$$

$$\therefore a = 3$$

22. 두 함수  $f(x) = \frac{x+2}{2}$ ,  $g(x) = 3x+1$ 에 대하여  $(k \circ f)(x) = g(x)$ 을 만족하는  $k\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 을 구하면?

①  $3x-2$

②  $6x-5$

③  $2x-3$

④  $x+1$

⑤  $4x+1$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x) \Rightarrow k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x+2}{2}, x = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y = 2x-2 \cdots f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow k(x) = g(f^{-1}(x)) = 3(2x-2) + 1 = 6x-5$$

$$\therefore k\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6\left(\frac{x+1}{2}\right) - 5 = 3x-2$$