

1. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$ 이므로

$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

2. 함수 $f(x) = ax^3 - bx + 10$ (a, b 는 상수)에 대하여 $f(-7) = 5$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned} f(-7) &= -7^3a + 7a + 10 = 5 \text{ 에서, } 7^3a - 7a = 5 \\ \therefore f(7) &= 7^3a - 7a + 10 = 5 + 10 = 15 \end{aligned}$$

3. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

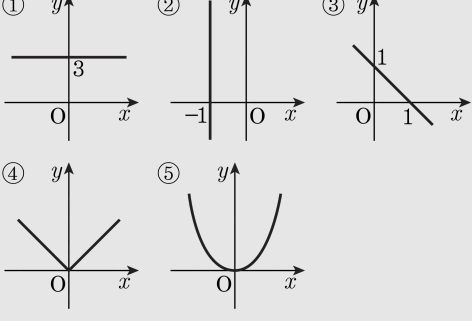
$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

4. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

- ① $y = 3$
- ② $x = -1$
- ③ $y = -x + 1$
- ④ $y = |x|$
- ⑤ $y = x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.

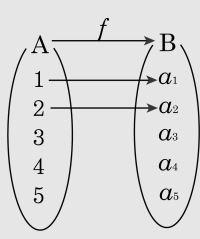


여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다. 따라서 만족하는 함수는 ③이다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?
- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



6. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

$$\text{마찬가지로 } (g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

7. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x) - y = x - f(y) + 1$ 을 만족시키는 함수 f 에 대하여 $f(1)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$f(x) + f(y) = x + y + 1$$

$$x = y = 1 \text{ 일 때, } f(1) + f(1) = 3$$

$$\text{따라서 } f(1) = \frac{3}{2}$$

8. 두 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(3x - 7) = f(x + 2)$ 로 정의될 때, $g(-1)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(3x - 7) = f(x + 2)$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$g(-1) = f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$$

9. 함수 f 가 임의의 양수 m, n 에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(2^{2006})$ 의 값은 얼마인가?

① 1003 ② 2006 ③ 4012 ④ 2^{1003} ⑤ 2^{2006}

해설

$$\begin{aligned} f(2^{2006}) &= f(\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{2006\text{번}}) \\ &= \underbrace{f(2) + f(2) + \cdots + f(2)}_{2006\text{번}} \\ &= 2006f(2) = 2006 \end{aligned}$$

10. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f 가 $f(1) = -2$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

① $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

② $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \dots\dots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

11. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \leq y \leq 3\}$ 일 때 함수 $f : X \rightarrow Y, y = ax + b (a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는 상수 a, b 의 값의 합은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.

$\therefore x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고

$-a + b = 3$

$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며

$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$

$\therefore a + b = 1$

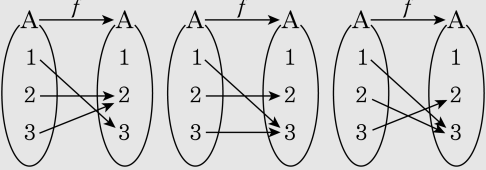
12. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

- I. $f(1) = 3$
II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
 $f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
 $f(2), f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



13. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

- ① 2 가지
- ② 3 가지
- ③ 6 가지
- ④ 8 가지
- ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$
 $\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

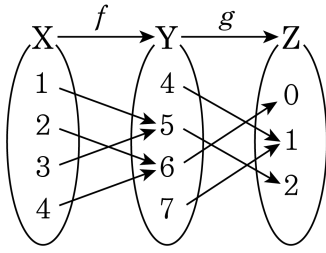
14. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \emptyset$)

- ① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)
 $x^3 + 2x - 3x^2 = 0$
 $x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2) = 0$
 $x = 0, 1, 2$
 x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \emptyset$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$ (개)

15. 아래 그림과 같이 주어진 함수 f, g 에 대하여 $(g \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?



- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 2$

16. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면

$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$

$\therefore h(1) = -2$

17. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5
- ② 3
- ③ 1
- ④ -3
- ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

18. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n) = \begin{cases} n-2 & (n \geq 100 \text{일때}) \\ f(f(n+4)) & (n < 100 \text{일때}) \end{cases} \quad \text{에서 } f(96) \text{의 값을 구하면?}$$

① 78

② 80

③ 98

④ 99

⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} f(96) &= f(f(100)), \quad f(100) = 98, \\ f(98) &= f(f(102)), \quad f(102) = 100 \\ \therefore f(96) &= 98 \end{aligned}$$

19. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

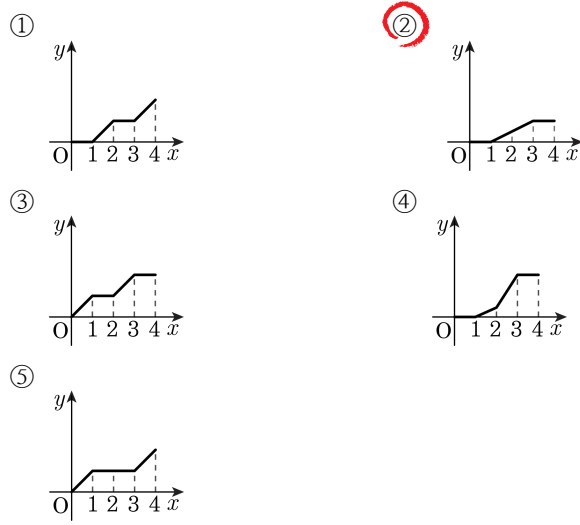
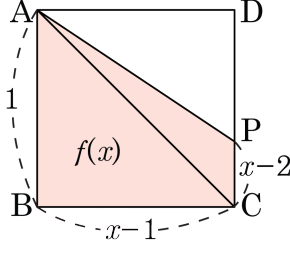
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

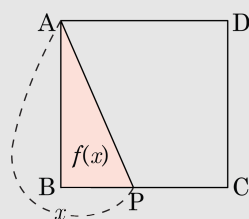
$$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$\therefore f(0) + f(2) = 1$$

20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \quad \text{한편, 각 구간의 경계점에서}$$

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

21. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

- ① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$
일대일 대응의 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

22. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
 $= f((x+1)+1) = f(x+2)$
 $= (x+2)+1 = x+3$
 $\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
 $= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
 $= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

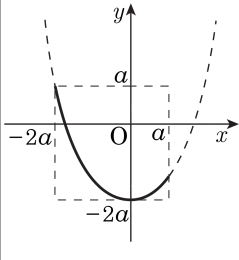
따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

23. 집합 $D = \{x \mid -2a \leq x \leq a\}$ 에서 집합 $R = \{x \mid x \text{ 는 실수} \}$ 로의 함수 f 가 $f(x) = x^2 + b$ 이고 $f(D) = D$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, $ab \neq 0$)

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a \geq -2a$ 이므로 $a > 0$
그림에서
 $f(0) = b = -2a \cdots \textcircled{㉠}$
 $f(-2a) = 4a^2 + b$
 $\qquad = a \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서
 $a = \frac{3}{4}, b = -\frac{3}{2}$
 $\therefore a + b = -\frac{3}{4}$



24. 실수 전체의 집합을 R , 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, R 에서 R 로의 함수 f 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) \begin{cases} \sqrt{2} & (x \in Q \text{일 때}) \\ 1 & (x \notin Q \text{일 때}) \end{cases} \quad \text{함수 } f \text{ 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

<보기>

- ㉠ $x \in Q$ 일 때, $(f \circ f)(x) = 1$
- ㉡ $x \in R$ 일 때, $f(x + f(x)) = 1$
- ㉢ $x_1, x_2 \in R$ 이고, $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이면 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 1$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \in Q$ 이면 $f(x) = \sqrt{2} \notin Q$
 $\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$
㉡ i) $x \in Q$ 이면 $x + f(x) = x + \sqrt{2} \notin Q$
 $\therefore f(x + f(x)) = 1$
ii) $x \notin Q$ 이면 $x + f(x) = x + 1 \notin Q$
 $\therefore f(x + f(x)) = 1$
따라서, $x \in R$ 이면 $f(x + f(x)) = 1$
㉢ $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이므로 $x_1 \notin Q, x_2 \notin Q$
그런데 $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 인 경우에는
 $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이지만
 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(1) = \sqrt{2}$
따라서 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 가 반드시 1이라고 할 수는 없다.

25. 두 함수 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x+3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

- ① $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ③ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ④ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ⑤ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,

$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$

$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3=t$ 로 놓으면

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ 일 때} \right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0 \text{ 일 때} \right) \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$$