1. 두 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(x)=2x^2-3x$ 일 때, 함수 f의 치역을 구하면?

① $\{-1,\ 1\}$ ② $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1,\ 2\}$

④ $\{-1,\ 0,\ 2\}$ ⑤ $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

해설

$f(x)=2x^2-3x$이므로

$f(0)=0,\ f(1)=-1,\ f(2)=2$

따라서 치역은 $\{-1,\ 0,\ 2\}$

2. 함수 $f(x)=ax^3-bx+10$ (a, b 는 상수)에 대하여 $f(-7)=5$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$f(-7)=-7^3a+7a+10=5$ 에서, $7^3a-7b=5$

$\therefore\ f(7)=7^3a-7b+10=5+10=15$

3. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로

$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서

$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$\therefore\ x=5,\ -1$

즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.

$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

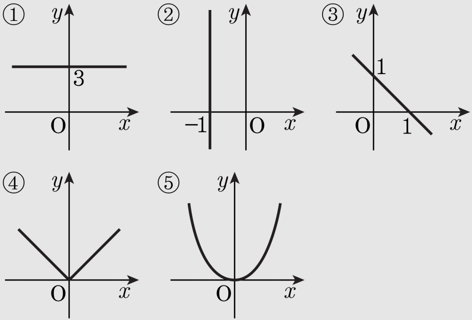
4. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

① $y = 3$　② $x = -1$　③ $y = -x + 1$

④ $y = |x|$　⑤ $y = x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다.

따라서 만족하는 함수는 ③이다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

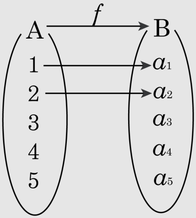
① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개

④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 $f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



6. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$ ② $a = 1$

③ $b = c$ ④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$\therefore\ ac + b = ab + c$

즉, $(a - 1)(b - c) = 0$

$\therefore\ a = 1$ 또는 $b = c$

7. 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)-y=x-f(y)+1$을 만족시키는 함수 f에 대하여 $f(1)$의 값은 얼마인가?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$f(x)+f(y)=x+y+1$

$x=y=1$일 때, $f(1)+f(1)=3$

따라서 $f(1)=\frac{3}{2}$

8. 두 함수 f, g가 $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(3x-7) = f(x+2)$로 정의될 때, $g(-1)$의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(3x-7) = f(x+2)$에 $x = 2$를 대입하면

$g(-1) = f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$

9. 함수 f가 임의의 양수 m, n에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(2^{2006})$의 값은 얼마인가?

① 1003 ② 2006 ③ 4012 ④ 2^{1003} ⑤ 2^{2006}

해설

$$
\begin{aligned}
f(2^{2006}) &= f(2 \times 2 \times \cdots \times 2) \\
&= f(2) + f(2) + \cdots + f(2) \\
&= 2006 f(2) = 2006
\end{aligned}
$$

10. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f가 $f(1) = -2,\ f(a+b) = f(a)+f(b)$을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

①$f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

②$f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤$f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \cdots\cdots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

11. $X=\{x\mid -1\le x\le 2\}$, $Y=\{y\mid 0\le y\le 3\}$ 일 때 함수$f:X\to Y, y=ax+b(a<0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a,b 의 값의 합은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$f(x)=ax+b$ 는 $a<0$ 이므로 감소함수이다.
$\therefore\ x=-1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고
$-a+b=3$
$x=2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며
$2a+b=0$ 두 식을 연립하면 $a=-1, b=2$
$\therefore\ a+b=1$

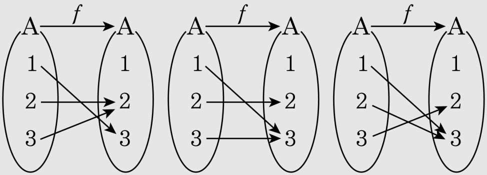
12. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f:A\rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1)=3$ Ⅱ. $x\in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2)=2$ 또는 $f(3)=2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

13. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

① 2 가지　② 3 가지　③ 6 가지

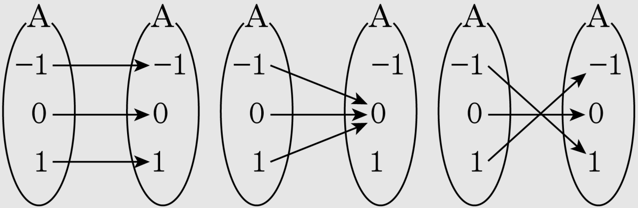
④ 8 가지　⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$

$\therefore f(0) = 0 \cdots$ ㉠

$f(-1) = -f(1) \cdots$ ㉡



㉠, ㉡을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

14. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개　② 3 개　③ 4 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,

($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$

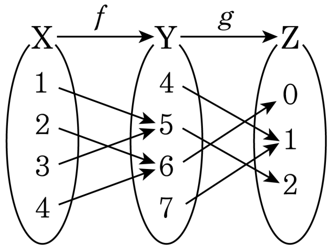
$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$

$x = 0, 1, 2$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개)

15. 아래 그림과 같이 주어진 함수 f, g에 대하여 $(g \circ f)(3)$의 값을 구하면?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 2$

16. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$의 값은 얼마인가?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$에 $x = 1$을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$이므로 $h(1) = k$라 하면

$f(k) = 1$에서 $f(k) = k + 3 = 1$이므로 $k = -2$

$\therefore\ h(1) = -2$

17. 두 함수 $f(x) = 2x+3$, $g(x) = -4x-5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5　　② 3　　③ 1　　④ -3　　⑤ -5

해설

$h(x) = ax+b$ 로 놓으면
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x+3)$
$= a(2x+3)+b = 2ax+3a+b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
$2ax+3a+b = -4x-5,$
$2a = -4,\ \ 3a+b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x+1$
$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x+3$ 이므로
$h(2x+3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
$h(3) = g(0) = -5$

18. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n) = \begin{cases} n-2 & (n \geq 100\text{일때}) \\ f(f(n+4)) & (n < 100\text{일때}) \end{cases}$$

에서 $f(96)$ 의 값을 구하면?

① 78　② 80　③ 98　④ 99　⑤ 100

해설

$f(96) = f(f(100)),\ f(100) = 98,$
$f(98) = f(f(102)),\ f(102) = 100$
$\therefore f(96) = 98$

19. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

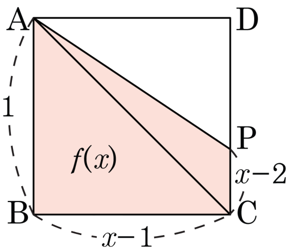
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로

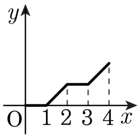
$x = 1$, $y = 1$ 을 준식에 대입하면

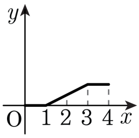
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$

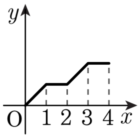
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

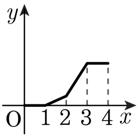
20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

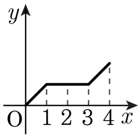


①


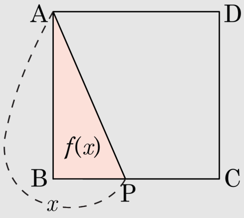
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

21. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

> 집합 $\mathrm{A} = \{a,\ b,\ c\}$일 때, A에서 A로의 함수 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$에 대하여,
> 함수의 개수는 m개,
> 일대일 대응 함수의 개수는 n개,
> 상수 함수는 s개,
> 항등함수는 r개이다.
> $m+n+s+r$의 값을 구하여라.

① 21　② 27　③ 33　④ 37　⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$(가지)　$\therefore\ m = 27$
일대일 대응의 개수는
$3 \times 2 \times 1 = 6$(가지) $\therefore\ n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c인 경우의 3가지
$\therefore\ s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore\ r = 1$
따라서 $m+n+s+r = 27+6+3+1 = 37$

22. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(x) = x + 1$ ㄴ $f(x) = -x$

ㄷ $f(x) = -x + 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$

$= f((x+1)+1) = f(x+2)$

$= (x+2)+1 = x+3$

$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

ㄴ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$

$= f(-(-x)) = f(x)$

ㄷ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$

$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

23. 집합 $D=\{x\,|\,-2a\le x\le a\}$ 에서 집합 $R=\{x\,|\,x$ 는 실수$\}$ 로의 함수 f 가 $f(x)=x^2+b$ 이고 $f(D)=D$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, $ab\neq 0$)

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a\ge -2a$ 이므로 $a>0$

그림에서

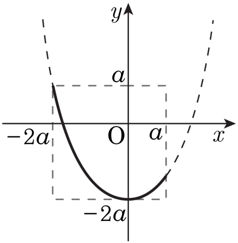
$f(0)=b=-2a\cdots$ ㉠

$$f(-2a)=4a^2+b$$
$$=a\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{3}{4}$



24. 실수 전체의 집합을 R, 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, R 에서 R 로의 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)\begin{cases}\sqrt{2} & (\,x\in Q\text{일 때})\\ 1 & (\,x\notin Q\text{일 때})\end{cases}$$

함수 f 에 대한 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $x\in Q$ 일 때, $(f\circ f)(x)=1$

㉡ $x\in R$ 일 때, $f(x+f(x))=1$

㉢ $x_1, x_2\in R$ 이고, $f(x_1)=f(x_2)=1$ 이면 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $x\in Q$ 이면 $f(x)=\sqrt{2}\notin Q$

$\therefore\ (f\circ f)(x)=f(f(x))=1$

㉡ i) $x\in Q$ 이면 $x+f(x)=x+\sqrt{2}\notin Q$

$\therefore\ f(x+f(x))=1$

ii) $x\notin Q$ 이면 $x+f(x)=x+1\notin Q$

$\therefore\ f(x+f(x))=1$

따라서, $x\in R$ 이면 $f(x+f(x))=1$

㉢ $f(x_1)=f(x_2)=1$ 이므로 $x_1\notin Q,\ x_2\notin Q$

그런데 $x_1=1+\sqrt{2},\ x_2=1-\sqrt{2}$ 인 경우에는

$f(x_1)=f(x_2)=1$ 이지만

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=f(1)=\sqrt{2}$

따라서 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 가 반드시 1이라고 할 수는 없다.

25. 두 함수 $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x+3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(x \geq -2) \\ 0 \quad (x < -2) \end{cases}$

② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(x \geq -1) \\ 0 \quad (x < -1) \end{cases}$

③ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x \geq -2) \\ 0 \quad (x < -2) \end{cases}$

④ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x \geq -1) \\ 0 \quad (x < -1) \end{cases}$

⑤ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x \geq 0) \\ 0 \quad (x < 0) \end{cases}$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.
$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,
$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$
$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3 = t$ 로 놓으면

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0\text{일 때}\right) \\ 0\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0\text{일 때}\right) \end{cases}$$

즉 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x \geq -1) \\ 0(x < -1) \end{cases}$