

1. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$$\therefore f(25) = 26$$

2. 함수 $f(x) = ax^3 - bx + 10$ (a, b 는 상수)에 대하여 $f(-7) = 5$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$$f(-7) = -7^3a + 7a + 10 = 5 \text{ 에서, } 7^3a - 7a = 5$$

$$\therefore f(7) = 7^3a - 7a + 10 = 5 + 10 = 15$$

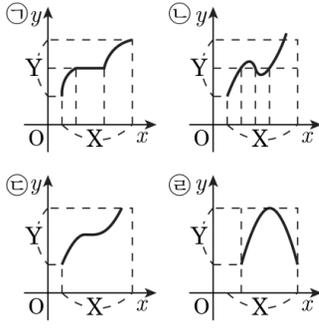
3. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5, g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

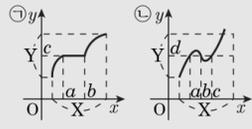
4. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① (㉠) (㉢) ② (㉡) (㉣) ③ (㉢) (㉣)
 ④ (㉠) ⑤ (㉠) (㉡) (㉣)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



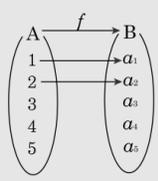
- ㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일 대응이 아니다.
 ㉡ a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.
 ㉢, ㉣의 경우와 같다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



6. 두 함수 $f(x) = -3x+k$, $g(x) = 2x+4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$f(x) = -3x+k, g(x) = 2x+4 \text{에서}$$

$$(f \circ g)(x) = f(2x+4) = -3(2x+4) + k \\ = -6x - 12 + k \cdots \text{㉠}$$

$$(g \circ f)(x) = g(-3x+k) = 2(-3x+k) + 4 \\ = -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$-6x - 12 + k = -6x + 2k + 4$$

$$\therefore k = -16$$

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로
 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$,
 $g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

8. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1, f(3) = 3$ 을 만족

$$-a + b = -1, 3a + b = 3$$

따라서 $a = 1, b = 0$

2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3, f(3) = -1$

$$-a + b = 3, 3a + b = -1$$

따라서 $a = -1, b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$$a < 0$$
일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$

즉 $a + b = 1$

9. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 의 함수 f 가 $f(n) = (n^3 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$$1^3 = 1$$

즉 나머지 : 1

$$2^3 = 7 \times 1 + 1$$

즉 나머지 : 1

$$3^3 = 27 = 7 \times 3 + 6$$

즉 나머지 : 6

$$4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$$

즉 나머지 : 1

$$5^3 = 125 = 7 \times 17 + 6$$

즉 나머지 : 6

따라서 치역은 $\{1, 6\}$

\therefore 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

10. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 +$
 $\{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로
 $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 +$
 $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이
 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.
이 때, 정의역 중에서 $1, \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에
대응하는 것은 2개이어야 한다.
따라서 $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$
 $= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$

11. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2$ ($\because a$ 는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

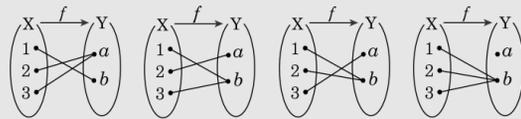
12. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



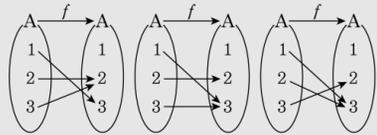
14. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

I. $f(1) = 3$
 II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
 $f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
 $f(2), f(3)$ 의 값이 동시에
 3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
 1 에 대응해서는 안된다.
 따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



15. 세 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ h))(1)$, $((f \circ g) \circ h)(1)$ 의 값을 각각 a , b 라고 할 때, $2a - b$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} a &= (f \circ (g \circ h))(1) = f((g \circ h)(1)) \\ &= f(g(h(1))) \\ &= f(g(1)) = f(0) = 3 \\ b &= ((f \circ g) \circ h)(1) = (f \circ g)(h(1)) \\ &= f(g(h(1))) = 3 \\ \therefore 2a - b &= 2 \cdot 3 - 3 = 3 \end{aligned}$$

16. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$
한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면
 $f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$
 $\therefore h(1) = -2$

17. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때,
 $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로
 $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$
 $3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$
 $\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

18. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

- ① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

19. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

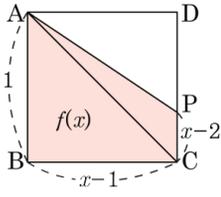
- ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.
㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
 $\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
 $\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

21. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

- ① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$
일대일 대응의 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

22. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $f(x) = x + 1$ ㉡ $f(x) = -x$
 ㉢ $f(x) = -x + 1$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
 $= f((x+1)+1) = f(x+2)$
 $= (x+2)+1 = x+3$
 $\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$
 ㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
 $= f(-(-x)) = f(x)$
 ㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
 $= f(-(-x+1)+1) = f(x)$
 따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

23. $f(x) = x^2 - x$ 로 나타내어지는 함수 $f : A \rightarrow A$ 는 $A = \{x \mid x \geq a\}$ 이면 일대일 대응이다. a 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

해설

$f : A \rightarrow A$ 가 일대일함수이므로

그림에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대

응이므로

$A = \{x \mid x \geq a\}$ 에서 $f(a) = a$ 이어야

한다.

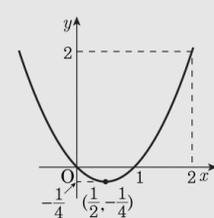
$f(x) = x^2 - x$ 에서 $f(a) = a$ 이므로

$$a^2 - a = a \rightarrow a^2 - 2a = 0$$

$$\therefore a = 0, 2$$

그런데, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$$\therefore a = 2$$



24. 실수 전체의 집합을 R , 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, R 에서 R 로의 함수 f 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) \begin{cases} \sqrt{2} & (x \in Q \text{일 때}) \\ 1 & (x \notin Q \text{일 때}) \end{cases} \text{ 함수 } f \text{에 대한 다음 <보기>의 설명 중}$$

옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

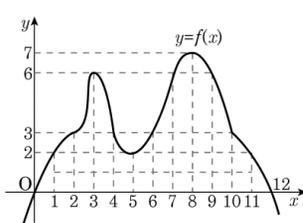
- ㉠ $x \in Q$ 일 때, $(f \circ f)(x) = 1$
 ㉡ $x \in R$ 일 때, $f(x + f(x)) = 1$
 ㉢ $x_1, x_2 \in R$ 이고, $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이면
 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 1$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \in Q$ 이면 $f(x) = \sqrt{2} \notin Q$
 $\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$
 ㉡ i) $x \in Q$ 이면 $x + f(x) = x + \sqrt{2} \notin Q$
 $\therefore f(x + f(x)) = 1$
 ii) $x \notin Q$ 이면 $x + f(x) = x + 1 \notin Q$
 $\therefore f(x + f(x)) = 1$
 따라서, $x \in R$ 이면 $f(x + f(x)) = 1$
 ㉢ $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이므로 $x_1 \notin Q, x_2 \notin Q$
 그런데 $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 인 경우에는
 $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이지만
 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(1) = \sqrt{2}$
 따라서 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 가 반드시 1이라고 할 수는 없다.

25. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,
 $f(f(x+2)) = 6$
 $x+2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$
 $\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$
 그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로
 $f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$
 (i) $f(t) = 3$ 일 때,
 $t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$
 (ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$
 $\therefore x = 6$
 (i), (ii) 에서
 실수 x 의 값은 0, 2, 4, 6, 8 의 5 개이다.