1. 1보다 큰 자연수 x에 대하여 $f(x) = \dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$로 정의 할 때, $f(25)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$

$\therefore f(25) = 26$

2. 함수 $f(x)=ax^3-bx+10$ (a, b 는 상수)에 대하여 $f(-7)=5$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$f(-7)=-7^3a+7a+10=5$ 에서, $7^3a-7b=5$

$\therefore\ f(7)=7^3a-7b+10=5+10=15$

3. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$

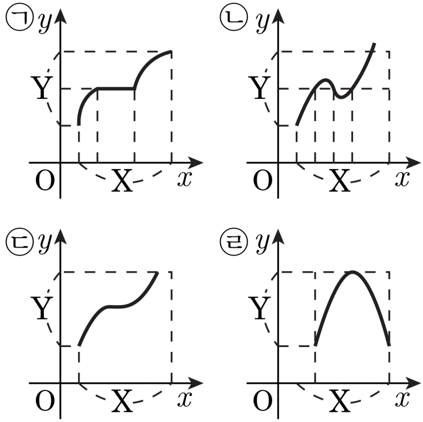
$(x-5)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = 5,\ -1$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.

$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

4. 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

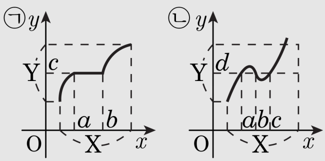


① (ㄱ) (ㄷ) ② (ㄴ) (ㄹ) ③ (ㄷ)

④ (ㄱ) ⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$에 속하는 x의 상이 모두 c이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ a, b, c의 상이 모두 d이므로 일대일 대응이 아니다.

㉣, ㉡의 경우와 같다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

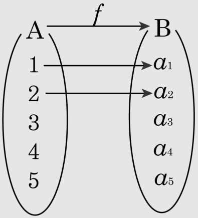
① 8 개　　② 25 개　　③ 64 개

④ 81 개　　⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 $f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



6. 두 함수 $f(x)=-3x+k$, $g(x)=2x+4$에 대하여, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하도록 하는 k의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$f(x)=-3x+k,\ g(x)=2x+4$에서

$$(f\circ g)(x)=f(2x+4)=-3(2x+4)+k$$
$$=-6x-12+k\cdots ㉠$$
$$(g\circ f)(x)=g(-3x+k)=2(-3x+k)+4$$
$$=-6x+2k+4\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-6x-12+k=-6x+2k+4$

$\therefore k=-16$

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, $g(x) = -2$일 때, $f(4) + g(-1)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$f(x)$는 항등함수이므로
$f(x) = x$에서 $f(4) = 4$,
$g(x) = -2$에서 $g(-1) = -2$
$\therefore\ f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

8. 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$에 대하여 X에서 X로의 일차함수 $f(x) = ax + b$의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$일 때 $f(-1) = -1,\ f(3) = 3$을 만족

$-a + b = -1,\ 3a + b = 3$

따라서 $a = 1,\ b = 0$

2) $a < 0$일 때 $f(-1) = 3,\ f(3) = -1$

$-a + b = 3,\ 3a + b = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$a < 0$일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$

즉 $a + b = 1$

9. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \{y \mid y$는 정수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(n) = (n^3$을 7로 나눈 나머지$)$로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$1^3 = 1$

즉 나머지 : 1

$2^3 = 7 \times 1 + 1$

즉 나머지 : 1

$3^3 = 27 = 7 \times 3 + 6$

즉 나머지 : 6

$4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$

즉 나머지 : 1

$5^3 = 125 = 7 \times 17 + 6$

즉 나머지 : 6

따라서 치역은 $\{1,\ 6\}$

$\therefore$ 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

10. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 이고, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 에서 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 을 사용하여 $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 1, $\sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1 개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2 개이어야 한다.

따라서 $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$

$= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 = 9$

11. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ k\}$ 에서 집합 $Y = \{4,\ 7,\ a^4,\ a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4,\ f(2) = 7$ 이므로
$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2+3a$ 이어야 한다.
만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3\times3+1 \quad \therefore a^4 = 10$
그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는
자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.
$\therefore f(3) = a^2+3a,\ f(k) = a^4$
$f(3) = a^2+3a$ 에서 $a^2+3a = 10$
$a^2+3a-10 = 0,\ (a-2)(a+5) = 0$
$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$
$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$
$\therefore k = 5$
$\therefore a+k = 2+5 = 7$

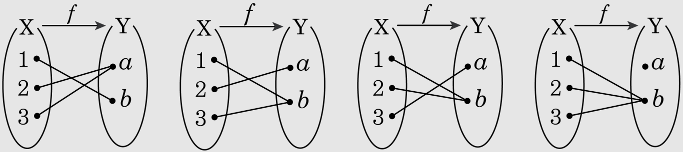
12. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1)=b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______개

▷ **정답 :** 4 개

해설

$f(1)=b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f\ :\ A \to B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

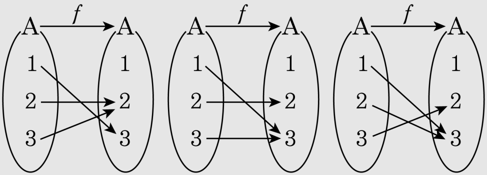
14. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$
Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

15. 세 함수 $f(x) = 2x+3,\ g(x) = x^2-1,\ h(x) = -x+2$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ h))(1),\ ((f\circ g)\circ h))(1)$ 의 값을 각각 $a,\ b$ 라고 할 때, $2a-b$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 6　　⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} a = (f\circ(g\circ h))(1) &= f((g\circ h)(1)) \\ &= f((g(h(1))) \\ &= f((g(1))) = f(0) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = ((f\circ g)\circ h))(1) &= (f\circ g)(h(1)) \\ &= f(g(h(1))) = 3 \end{aligned}$$

$\therefore\ 2a-b = 2\cdot 3-3 = 3$

16. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$
한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면
$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$
$\therefore\ h(1) = -2$

17. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$　　② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$　　④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때,

$(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$

$3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$

$\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

18. 집합 $X = \{-1,\ 1, -i,\ i\}$ 에 대하여 $f\ :\ X \to Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제곱하여 모두 합하면?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$ 이다.
모든 원소를 제곱하여 더하면
$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

19. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수) 로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다. ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다. ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서

㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수

$\therefore p = 0$

즉 $f(n) = 0$

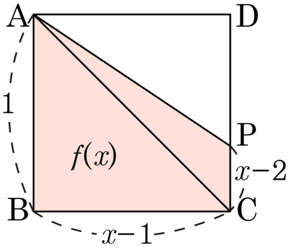
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$

$\therefore f(8) = f(24)$

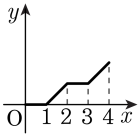
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$

홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

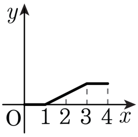
20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



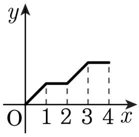
①



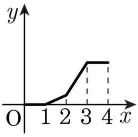
②



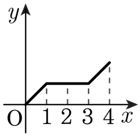
③



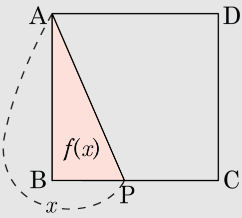
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

21. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$일 때, A에서 A로의 함수 $f : A \to A$에 대하여,
함수의 개수는 m개,
일대일 대응 함수의 개수는 n개,
상수 함수는 s개,
항등함수는 r개이다.
$m+n+s+r$의 값을 구하여라.

① 21　② 27　③ 33　④ 37　⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$(가지)　$\therefore\ m = 27$
일대일 대응의 개수는
$3 \times 2 \times 1 = 6$(가지) $\therefore\ n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c인 경우의 3가지
$\therefore\ s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore\ r = 1$
따라서 $m+n+s+r = 27+6+3+1 = 37$

22. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$　　㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$

$= f((x+1)+1) = f(x+2)$

$= (x+2)+1 = x+3$

$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$

$= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$

$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

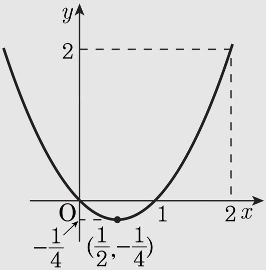
23. $f(x) = x^2 - x$ 로 나타내어지는 함수 $f : A \rightarrow A$ 는 $A = \{x \mid x \geq a\}$ 이면 일대일대응이다. a 의 값을 구하면 ?

① 4　　② 2　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ 0

해설

$f : A \rightarrow A$ 가 일대일함수이므로

그림에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대응이므로



$A = \{x \mid x \geq a\}$ 에서 $f(a) = a$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - x$ 에서 $f(a) = a$ 이므로

$a^2 - a = a \rightarrow a^2 - 2a = 0$

$\therefore\ a = 0,\ 2$

그런데, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore\ a = 2$

24. 실수 전체의 집합을 R, 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, R 에서 R 로의 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)\begin{cases}\sqrt{2} & (\ x\in Q\text{일 때}) \\ 1 & (\ x\notin Q\text{일 때})\end{cases}$$

함수 f 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $x\in Q$ 일 때, $(f\circ f)(x)=1$

㉡ $x\in R$ 일 때, $f(x+f(x))=1$

㉢ $x_1,x_2\in R$ 이고, $f(x_1)=f(x_2)=1$ 이면 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=1$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $x\in Q$ 이면 $f(x)=\sqrt{2}\notin Q$

$\therefore\ (f\circ f)(x)=f(f(x))=1$

㉡ i) $x\in Q$ 이면 $x+f(x)=x+\sqrt{2}\notin Q$

$\therefore\ f(x+f(x))=1$

ii) $x\notin Q$ 이면 $x+f(x)=x+1\notin Q$

$\therefore\ f(x+f(x))=1$

따라서, $x\in R$ 이면 $f(x+f(x))=1$

㉢ $f(x_1)=f(x_2)=1$ 이므로 $x_1\notin Q,\ x_2\notin Q$

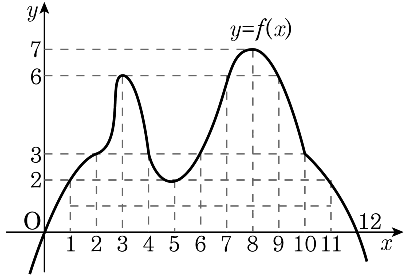
그런데 $x_1=1+\sqrt{2},\ x_2=1-\sqrt{2}$ 인 경우에는

$f(x_1)=f(x_2)=1$ 이지만

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=f(1)=\sqrt{2}$

따라서 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 가 반드시 1이라고 할 수는 없다.

25. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



① 3 개　② 4 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,

$f(f(x+2)) = 6$

$x + 2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$

$\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$

그런데 $f(t) \le 7$ 이므로

$f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$

(i) $f(t) = 3$ 일 때,

$t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$

(ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$

$\therefore x = 6$

(i) , (ii) 에서

실수 x 의 값은 0 , 2 , 4 , 6 , 8 의 5 개이다.