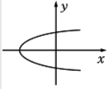
1. 다음 중 함수가 아닌 것을 고르면?

① $2y = x - 1$　② $y = -x^2 - 8$　③ $y = 5$

④ $x = y^2 - 4$　⑤ $y = 3|x| - 1$

해설

함수는 하나의 x값에 두 개 이상의 y값이 대응될 수 없다.



④ : $x = y^2 - 4$

2. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의 넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b^2-4ac<0$이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2-4ac>0$이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다.
즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

3. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로

$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서

$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$\therefore\ x=5,\ -1$

즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.

$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

4. $X=\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$, $Y=\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$ 에서 $f\ :\ X\to Y,\ f(x)=ax+b$ (단, $a>0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정하면?

① $a=\dfrac{3}{2},\ b=0$ ② $a=\dfrac{1}{2},\ b=0$ ③ $a=\dfrac{3}{2},\ b=1$

④ $a=\dfrac{5}{2},\ b=0$ ⑤ $a=2,\ b=0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a>0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2)=-2a+b=-3 \\ f(2)=2a+b=3 \end{cases}$$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2},\ b=0$

5. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$　　㉡ $g(x) = x^2$

㉢ $h(x) = -x$　　㉣ $k(x) = |x|$

① 4 개　② 3 개　③ 2 개　④ 1 개　⑤ 없다

해설

이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응,
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2 개

6. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1}가 존재하므로, f는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는 4개이다.

7. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f를 $f(x) = (x^2$을 3으로 나눈 나머지$)$로 정의할 때, 함수 f의 치역을 구하면?

① $\{0\}$ ② $\{1\}$ ③ $\{0, 1\}$

④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{0, 1, 2\}$

해설

모든 정수는 $3k, 3k+1, 3k+2$ (k는 정수)의 세 가지 중 하나의 꼴로 나타낼 수 있다.

(i) $x = 3k$ 일 때 $x^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$

$\therefore\ f(x) = 0$

(ii) $x = 3k+1$ 일 때 $x^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$

$\therefore\ f(x) = 1$

(iii) $x = 3k+2$ 일 때 $x^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$

$\therefore\ f(x) = 1$

따라서 임의의 정수 x에 대하여 x^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이므로 구하는 치역은 $\{0, 1\}$이다.

8. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때

$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$x = 9,\ y = 3$ 일 때

$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

9. 정의역이 $\{0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b,\ g(x) = 2x + 1$에 대하여 $f = g$일 때, $a - b$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $f,\ g$가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$이다.
즉, $f(0) = g(0),\ f(1) = g(1)$이므로
$f(0) = b,\ g(0) = 1$에서 $b = 1$
$f(1) = 1 + a + b,\ g(1) = 3$에서 $a + b = 2$
$\therefore a = 1$
$\therefore a - b = 0$

10. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 <u>모두</u> 고르면?

<보기>

㉠ $f(x) = x + 1$　　　㉡ $f(x) = 1$

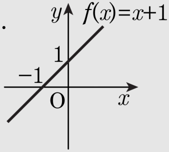
㉢ $f(x) = x^3$　　　㉣ $f(x) = |x + 1|$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉢, ㉣

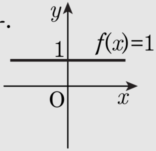
해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

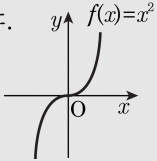
ㄱ.



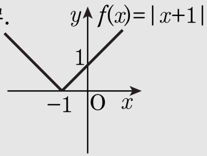
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

11. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x\in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키려면
-1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지.
0 이 대응할 수 있는 원소는
$f(-0)=-f(0)$ 에서, $2f(0)=0$,
즉 0 의 1 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5\times1\times1=5$ (개)

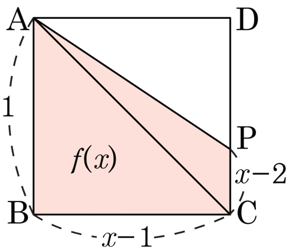
12. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0)+f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

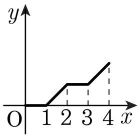
해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1$, $y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

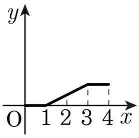
13. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



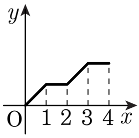
①



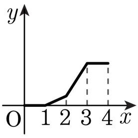
②



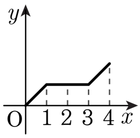
③



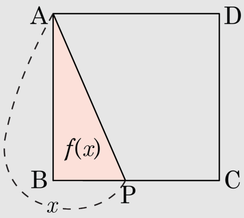
④



⑤



해설



x의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0\le x\le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1\le x\le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2\le x\le 3) \\ 1 & (3\le x\le 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

14. 두 집합 $X = \{1,\ 2\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 2 개 ② 5 개 ③ 10 개

④ 20 개 ⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1,\ 2\}$ 이고 $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 5 가지
$f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4 가지
$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(개)

15. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개　② 20 개　③ 25 개　④ 27 개　⑤ 30 개

해설

$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

16. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면

$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$

$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

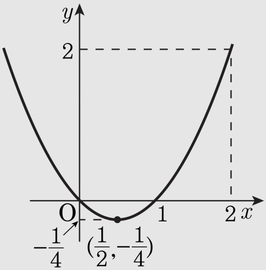
$a=1,\ b=1$

이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$

17. $f(x)=x^2-x$ 로 나타내어지는 함수 $f\ :\ A\ \to\ A$ 는 $A=\{x \mid x \geq a\}$ 이면 일대일대응이다. a 의 값을 구하면 ?

① 4　　② 2　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ 0

해설



$f\ :\ A\ \to\ A$ 가 일대일함수이므로

그림에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대응이므로

$A=\{x \mid x \geq a\}$ 에서 $f(a)=a$ 이어야 한다.

$f(x)=x^2-x$ 에서 $f(a)=a$ 이므로

$a^2-a=a \to a^2-2a=0$

$\therefore\ a=0,\ 2$

그런데, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore\ a=2$