

1. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 p 의 값을 모두 곱하면?

① -8

② -4

③ 1

④ 4

⑤ 8

해설

$$D = p^2 - 4(2p + 1)$$

$$= p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 p 에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

2. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = 1, b = 2$

② $a = 0, b = 3$

③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$

⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k - a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

3. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

4. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4$$

$$= \{x - (-1 + \sqrt{3}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{3}i)\}$$

$$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

5. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 4 + 6k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 가질 조건은

$$D = 25 + 8k \geq 0$$

$$\therefore k \geq -\frac{25}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{25}{8} \leq k < -\frac{2}{3}$$

따라서, 정수 $k = -3, -2, -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

6. 이차방정식 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$ 의 두 근의 절대값의 비가 3 : 2 일 때, 양수 m 의 값은? (단, m 은 정수가 아니다.)

① $\frac{25}{9}$

② $\frac{23}{9}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{7}{3}$

⑤ $\frac{22}{9}$

해설

두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{3m-5}{m}, \alpha\beta = -\frac{24}{m} \text{에서}$$

$m > 0$ 이므로 $\alpha\beta < 0$

$|\alpha| : |\beta| = 3 : 2$ 이므로

두 근을 $3\alpha, -2\alpha$ 라 하면

$$3\alpha + (-2\alpha) = -\frac{3m-5}{m}, 3\alpha \cdot (-2\alpha) = -\frac{24}{m}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{3m-5}{m}, -6\alpha^2 = -\frac{24}{m}$$

$$\left(\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m}, (9m-25)(m-1) = 0$$

m 은 정수가 아니므로 $m = \frac{25}{9}$

7. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2k^2 - k = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, k 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}, -1$

② $-\frac{3}{2}, 1$

③ $\frac{3}{2}, 1$

④ $\frac{1}{2}, -3$

⑤ $-\frac{1}{2}, 3$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서 두근의 차는 $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$

∴ 주어진 방정식의 두근의 차는

$$\sqrt{16 - 8k^2 + 4k} = 2$$

$$4k - 8k^2 + 16 = 4$$

$$2k^2 - k - 3 = 0$$

$$(k + 1)(2k - 3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

8. $x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 2x + 2 = 0$

② $x^2 + 2x + 2 = 0$

③ $x^2 + 2x + 3 = 0$

④ $x^2 - x + 2 = 0$

⑤ $x^2 + x + 2 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1)x + (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\text{그런데, } \textcircled{㉠} \text{으로부터 } \alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2 = -1$$

$$(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (\alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1 = 2$$

$$\text{이것을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } x^2 + x + 2 = 0$$

9. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2 + 2cx + a-b$ 는 x 의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② $a = b$ 인 이등변삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ a 가 빗변인 직각삼각형

⑤ c 가 빗변인 직각삼각형

해설

a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

따라서, $a + b > 0$ 이므로 준식은 이차식이다.

준식이 완전제곱식이 되려면

$$\text{판별식 } D = 0$$

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0$$

$$\text{정리하면, } c^2 - a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, a 가 빗변인 직각삼각형

10. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{8}{49}$

② $\frac{49}{8}$

③ 49

④ 8

⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$