1. p : $x = 3$, q : $x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ **답 :** 조건

▷ **정답 :** 충분조건

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $P = \{3\}, Q = \{0, 3\}$ 이므로 $P \subset Q, Q \not\subset P$ $\therefore$ 충분조건

2. 다음에서 조건 p 는 조건 q이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

$p : a, b$는 모두 짝수 $q : a+b$는 짝수

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$a,\ b$ 는 모두 짝수 $\rightarrow a+b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
$a = 2m,\ b = 2n$ ($n,\ m$ 은 자연수) 이면,
$a+b = 2m+2n = 2(m+n)$ 이므로 짝수이다.
한편, $a = 3,\ b = 3$ 일 때 $a+b = 6$ 이므로 짝수이지만, $a,\ b$ 는 모두 홀수이다.
$\therefore p$ 는 q의 충분조건이다.

3. 다음 보기의 명제 중 그 역이 참인 것을 모두 몇 개인가? (단 a, b, c 는 실수)

보기

㉠ $a > 0$ 이면 $\frac{1}{a} > 0$ 이다.

㉡ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

㉢ $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

㉣ $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$ 이다.

㉤ $a > b$ 이면 $a + c > b + c$ 이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠, ㉤의 역이 참이다.

4. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$　② $p \rightarrow q$　③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow q$　⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

‘명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.’

$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \rightarrow \sim p$(참)

$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \rightarrow q$(참)

5. 명제 '$x^2+2x+a \neq 0$ 이면 $x+1 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 3　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 0

해설

대우인 '$x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.' 가 참이 되어야 한다.

$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=0$

$\therefore\ a=1$

6. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로

$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$

$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

7. 조건 p, q 가 $p : x < 1$ 또는 $x \geq 2$, $q : \frac{a}{2} < x \leq 3a$ 일 때, '$\sim p$ 이면 q 이다.' 가 참이 되기 위한 a 의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \leq 2$　　② $\frac{2}{3} \leq a < 2$　　③ $1 \leq a < 2$

④ $1 < a \leq 2$　　⑤ $\frac{2}{3} < a < 2$

해설

명제의 대우는 '$\sim q$ 이면 p 이다'

$\sim q : x \leq \frac{a}{2}$ 또는 $x > 3a$, $p : x < 1$ 또는 $x \geq 2$ 이므로 명제의 대우가 참이 되려면 $\frac{a}{2} < 1$ 이고 $3a \geq 2$ 가 되어야 한다.

$a < 2$ 이고 $a \geq \frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{2}{3} \leq a < 2$ 이다.

8. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \to q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \to q$는 $\sim q \to \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3$: $9 + 3a - 6 \leq 0 \ \to \ a \leq -1$

2) $x = 1$: $1 - a - 6 \leq 0 \ \to \ a \geq -5$

$\therefore \ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

9. 명제 $\sim p \to q$와 $r \to \sim p$가 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① $\sim q \to p$　　② $\sim q \to \sim r$　　③ $p \to \sim r$

④ $r \to q$　　⑤ $q \to r$

해설

$\sim p \to q$ (T) 그의 대우 $\sim q \to p$ (T), $r \to \sim p$ (T) 그의 대우 $p \to \sim r$ (T) 또한 $r \to \sim p$, $\sim p \to q$ 이므로, $r \to q$ (T) 그의 대우 $\sim q \to \sim r$ (T)

10. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r에 대하여 다음 추론 중에서 옳은 것은?

① $p \Rightarrow \sim q$, $r \Rightarrow q$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

② $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

④ $q \Rightarrow p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

⑤ $q \Rightarrow \sim p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

해설

① $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
② $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
④ $\sim p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim p \Rightarrow r$
⑤ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

11. 네 집합 A, B, C, D 가 $A \subset B$, $C \subset D$ 를 만족시킬 때, 다음 (1), (2) 의 $\boxed{}$ 안에 들어갈 내용을 <보기> 에서 찾아 차례로 나열한 것을 고르면?

㉠ $B \subset C$ 인 것은 $A \subset D$ 이기 위한 $\boxed{}$

㉡ $B \cap D \neq \varnothing$ 인 것은 $A \cap C \neq \varnothing$ 이기 위한 $\boxed{}$

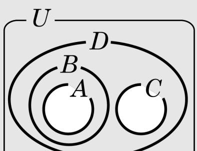
보기

Ⅰ. 필요조건이나, 충분조건은 아니다.
Ⅱ. 충분조건이나, 필요조건은 아니다.
Ⅲ. 필요충분조건이다.
Ⅳ. 아무 조건도 아니다.

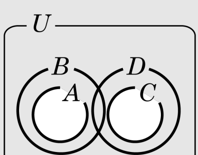
① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅰ ④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅱ

해설

㉠ $B \subset C$ 이면 $A \subset B \subset C \subset D$
$(\because\ A \subset B,\ C \subset D)$ $\therefore\ A \subset D$
그러나 $A \subset D$ 이면 $B \subset C$ 는 성립하지 않는다. 따라서, 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
[반례]



㉡ $B \cap D \neq \varnothing \nRightarrow A \cap C \neq \varnothing$ [반례]



12. 두 실수 a, b에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건을 모두 고르면?

① $p : |a|+|b| \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

② $p : a^2+b^2 \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

③ $p : a+b \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : a^2+b^2+2|ab| \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

⑤ $p : a^3+b^3 \neq 0$, $q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

해설

$q \rightarrow p$ 이므로, $\sim p \rightarrow \sim q$ 인지 확인한다.

① $|a|+|b|=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0 \rightarrow$ 참

② $a^2+b^2=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0 \rightarrow$ 참

③ $a+b=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0 \rightarrow$ 거짓

반례 : $a=4, b=-4$

④ $a^2+b^2+2|ab|=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$

$\rightarrow$ 참

⑤ $a^3+b^3=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0 \rightarrow$ 거짓

반례 : $a=3, b=-3$

13. a, b가 실수일 때, p가 q이기 위한 필요충분조건이 <u>아닌</u> 것은?

① $p:\ a^2+b^2=0,\ q:\ |a|+|b|=0$

② $p:\ a=0,\ q:\ |a+b|=|a-b|$

③ $p:\ |a|=|b|,\ q:\ a^2=b^2$

④ $p:\ a+b>0,\ ab>0,\ q:\ a>0,\ b>0$

⑤ $p:\ |a|+|b|>|a+b|,\ q:\ ab<0$

해설

$q:\ |a+b|=|a-b| \rightarrow a=0$ 또는 $b=0$

14. 다음 중 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고르면? (단, x, y는 실수)

> ㉠ $p : x = 0$ 또는 $y = 0$, $q : xy = 0$
>
> ㉡ $p : xy = 1$, $q : x = 1$ 이고 $y = 1$
>
> ㉢ $p : x$, y는 모두 짝수, $q : x + y$는 짝수

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉡ 필요조건

㉢ 충분조건

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A\cap B = B$　　② $A\cap B^c = B$　　③ $A\cup B = U$

④ $A - B = \varnothing$　　⑤ $B - A = U$

해설

$\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B$

$= \{(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\}\cap B$

$= \{A\cap(B\cup B^c)\}\cap B = A\cap B = A$

$A\subset B$ 이므로 $A\cap B^c = \varnothing$ 이면

$A\subset B$ 이므로 필요충분조건은 ④이다.

16. 세 조건 p, q, r 에 대하여 r 이 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 반드시 참 이라고 할 수 없는 것은?

① $p \rightarrow q$ ② $r \rightarrow \sim q$ ③ $p \rightarrow \sim r$

④ $q \rightarrow \sim r$ ⑤ $\sim p \rightarrow r$

해설

$r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow \sim r(T) \cdots$ ㉠

$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $r \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow r \rightarrow \sim p(T)$

$\Rightarrow p \rightarrow \sim r(T)$

17. 다음 두 조건으로 알 수 있는 것은?

㉠ 어떤 사람은 안경을 끼지 않았다. ㉡ 여자는 모두 안경을 꼈다.

① 남자는 모두 안경을 꼈다.

② 안경을 끼지 않은 여자도 있다.

③ 여자는 모두 안경을 끼지 않았다.

④ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

⑤ 남자는 모두 안경을 끼지 않는다.

해설

안경을 낀 사람의 집합을 A, 여자의 집합을 B 라고 하면

㉠ $A^c \neq \phi$

㉡ $B \subset A \Rightarrow A^c \subset B^c$

안경을 쓰지 않는 사람은 여자가 아니다.

$\therefore$ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

18. 다음의 두 진술이 모두 참이라고 할 때, 옳은 것은?

㉠ 키가 큰 학생은 농구를 잘한다.

㉡ 키가 큰 학생은 달리기 또는 수영을 잘한다.

① 키가 큰 학생은 달리기를 잘한다.

② 수영을 잘하는 학생은 농구도 잘한다.

③ 농구를 잘하는 학생은 달리기도 잘한다.

④ 달리기를 못하는 학생은 키가 크지 않다.

⑤ 달리기와 수영을 모두 못하는 학생은 키가 크지 않다.

해설

키가 큰 학생의 집합을 A , 농구를 잘하는 학생의 집합을 B, 달리기를 잘하는 학생의 집합을 C , 수영을 잘하는 학생의 집합을 D 라고 하면,

㉠ $A \subset B$ ㉡ $A \subset (C \cup D)$

① $A \subset (C \cup D)$ 에서 $A \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

② $D \subset B$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

③ $B \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

④ $A \not\subset C$ 이므로 $C^c \not\subset A^c$ 에서 거짓이다.

⑤ $A \subset (C \cup D)$ 에서 $(C \cup D)^c \subset A^c$

즉, $C^c \cap D^c \subset A^c$ 이므로 참이다.

19. 다음은 'x, y가 자연수일 때, xy가 짝수이면 x 또는 y가 짝수이다.' 를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

> 주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y에 대하여 x와 y가 (가)이면 xy도 (가)이다.' 이다.
> $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b는 자연수)라 하면
> $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy는 (나)가 된다.
> 따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① 짝수, 홀수, 참
② 짝수, 짝수, 참
③ 짝수, 짝수, 거짓
④ 홀수, 홀수, 참
⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y에 대하여 x와 y가 홀수이면 xy도 홀수이다.' 이다.
$x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b는 자연수)라 하면
$xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

20. 자연수 n에 대하여 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 <u>틀린</u> 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n이 (②)이므로 $n=$ (③) (k 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$
$\therefore$ n^2은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우 ② 홀수 ③ $2k+1$
④ 거짓 ⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

21. 다음 보기중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 모두 몇 개인가?(단, a, b 는 실수, n 은 자연수이다.)

보기

ㄱ $p : a = 0$ 이고 $b = 0$, $q : a^2 + b^2 = 0$

ㄴ $p : n$ 은 홀수, $q : n^2$ 은 홀수

ㄷ p: 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset C$, $B \subset C$,
$q : (A \cup B) \subset C$

ㄹ $p : a + bi = 0$, $q : ab = 0$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

ㄱ, ㄴ, ㄷ이 참이다.

ㄱ p, q 모두 $a = b = 0$ 임을 보여주는 식이므로 필요충분조건이 성립한다.

ㄴ 일반적인 홀수 $n = 2m - 1$ 이라 했을 때,
$n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$ 인데,
$2(2m^2 - 2m) + 1 = 2k + 1$
즉, 홀수 꼴이므로 제곱수 역시 홀수가 된다.

ㄷ p, q 두 조건 모두가 A, B 가 C 에 포함된다는 것을 의미하므로 필요충분조건이 성립한다.

ㄹ p 조건은 a, b 모두가 0 임을 나타내고 q 는 a 또는 b 가 0이라는 것을 의미하므로 충분조건만이 성립한다.

22. 두 집합 A, B에 대하여 두 조건 p, q는 $p : (A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing \quad q : [\quad]$ 이고, p 가 q이기 위한 필요충분조건일 때, [ ]의 내용으로 알맞은 것은?

① $A = \varnothing$　② $A = B$　③ $A \subset B$

④ $B \subset A$　⑤ $B = \varnothing$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing$이 성립하려면, $(A \cup B) \subset (A \cap B)$ 즉, $A = B$ 일 때이다.

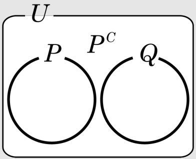
23. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim p$가 q이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \cap Q = \phi$　　② $P \subset Q$　　③ $Q \subset P$

④ $Q - P = \phi$　　⑤ $Q^c = P$

해설

$P \subset Q^c \leftrightarrow P - Q^c = P \cap Q = \varnothing$



24. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \cup (Q - P) = P$ 인 관계가 성립한다면 q 는 p 이기 위한 무슨 조건인가?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

해설

$$\begin{aligned} P \cup (Q - P) &= P \cup (Q \cap P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap U \\ &= P \cup Q \end{aligned}$$

에서 $P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$

따라서, q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

25. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다. B: A의 말은 진실이다. C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

(i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.

(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.

(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

26. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주 : 한결이가 빠졌어.
한결 : 민주가 한 말은 거짓말이야.
은하 : 민주가 빠졌어.
겨레 : 나는 안 빠졌어.

① 겨레, 한결　　② 겨레, 민주　　③ 겨레, 은하
④ 민주, 한결　　⑤ 민주, 은하

해설

㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.