

1. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$

② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$

④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned}\text{반지름 } r &= \overline{OA} = \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

∴ 원의 방정식은 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$

2. 세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$

② $x^2 + y^2 + 2x - 1y - 10 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 8 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 6x - 5y - 20 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

으로 놓으면 이 원이

세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을

지나므로 차례로 대입하면

$$1 + 16 - A + 4B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$9 + 36 + 3A + 6B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$9 - 3B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$A = -6, B = -2, C = -15$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

3. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x - 3)^2 + (y - 12)^2 = 169$

② $x^2 + (y - 5)^2 = 169$

③ $x^2 + (y - 5)^2 = 25$

④ $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 169$

⑤ $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면

x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$$

이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로

$$(3 - a)^2 + (1 - b)^2 = b^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(-4 - a)^2 + (8 - b)^2 = b^2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서

$$b = a + 5 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$a^2 - 8a = a(a - 8) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 8$$

$\textcircled{㉢}$ 에서 $a = 0$ 일 때 $b = 5$, $a = 8$ 일 때 $b = 13$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2 + (y - 5)^2 = 5^2$

또는 $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 13^2$

4. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

5. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

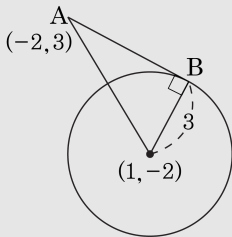
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



6. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + 1, y - 2)$ 에 의하여 점 $(1, 2)$ 가 옮겨진 점의 좌표는?

① $(2, 1)$

② $(2, 0)$

③ $(-2, 1)$

④ $(0, 4)$

⑤ $(1, -2)$

해설

$$(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 2)$$

$$\Rightarrow (1, 2) \rightarrow (1 + 1, 2 - 2) = (2, 0)$$

7. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ 을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 16

해설

$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ 을 변형하면

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$$

이 원이 평행이동하여 $x^2 + y^2 = c$ 가 되려면 $c = 10$

8. 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 의 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

② $x^2 + y^2 = 5$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

④ $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

⑤ $x^2 - y^2 + 2x + 4y = 0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ 를 대입한다.

9. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심 사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

10. 두 점에서 만나는 두 원
 $x^2 + y^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$
 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{㉡}$
 과 x, y 에 대한 방정식
 $k(x^2 + y^2 - 1) + (x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1) = 0$ (단, k 는 실수) $\dots\dots\dots \textcircled{㉢}$
 에 대하여 $\textcircled{㉢}$ 은 두 원 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 교점을 지나는 원의 방정식이거나
 두 원 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통현의 방정식임을 보인 과정이다. (가)~(마)에
 들어갈 말로 옳은 것은?

먼저 방정식 $\textcircled{㉢}$ 이 원이나 직선을 나타냄을 보이고, 또 $\textcircled{㉢}$ 이 두
 원 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 교점을 지남을 보인다.

(i) 방정식 $\textcircled{㉢}$ 을 정리하면

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2x + 2y - (k+1) = 0 \dots\dots\dots \textcircled{㉣}$$

이 때, $k = -1$ 이면 방정식 $\textcircled{㉣}$ 은

(가), 즉 $y = x$ 가 되어 (나)을 나타낸다.

또한, $k \neq -1$ 이면 방정식 $\textcircled{㉣}$ 은 (나)의 꼴이 되어 x^2 과 y^2 의
 계수가 같고 xy 의 항이 없으므로 (다)을 나타낸다.

즉, 방정식 $\textcircled{㉣}$ 은 (나) 또는 (다)을 나타낸다.

(ii) 두 원 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 교점을 (α, β) 라고 하면 $\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0$,
 $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 2\beta - 1 = 0$ 이므로 임의의 실수 k 에 대하여
 (라)이 성립한다.

따라서, 방정식 $\textcircled{㉣}$ 의 그래프는 k 의 값에 관계없이 점 (α, β) ,
 즉 (마)를 지난다.

(i), (ii)로부터 $\textcircled{㉢}$ 은 두 원 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 교점을 지나는 원의 방
 정식이거나 공통현의 방정식이다.

- ① (가) : $2x - 2y = 1$
 ② (나) : 원
 ③ (다) : 직선
 ④ (라) : $k(\alpha^2 + \beta^2 - 1) + (-2\alpha + 2\beta - 1) = 0$

⑤ (마) : 두 원 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 교점

해설

- ① (가) : $-2x + 2y = 0$
 ② (나) : 직선
 ③ (다) : 원
 ④ (라) : $k(\alpha^2 + \beta^2 - 1) + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 2\beta - 1) = 0$

11. 실수 a, b 와 두 원

$$A : (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$B : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 에 대하여}$$

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a + b = -1$

② $a + b = 1$

③ $a - b = 0$

④ $a^2 + b^2 = 1$

⑤ $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(1, 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$$(a-1)x + (b-1)y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$(a-1) \times 1 + (b-1) \times 1 + 1 = 0$$

$$\therefore a + b = 1$$

12. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ 의
공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{5}$

해설

주어진 두 원의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

점 O' 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \overline{BO'} = 1$$

$$\therefore \overline{OH} = 2 - 1 = 1$$

두 원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, $(3, 0)$

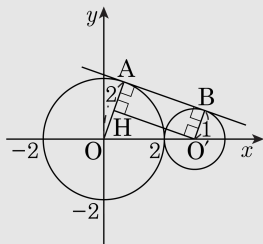
이므로

중심거리 $\overline{OO'}$ 은 3 이다.

따라서 $\triangle OO'H$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \overline{O'H} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$



13. 중심이 $C(1, 2)$ 이고, 직선 $L : x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

14. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

15. 좌표평면 위에 원 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1) 이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① 3

② $\sqrt{10}$

③ $\sqrt{11}$

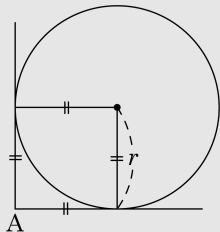
④ $\sqrt{13}$

⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림 처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다.

따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$$

$$\therefore r = 3$$

16. 점 $P(a, 0)$ 에서 원 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ 에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P 의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0), (7, 0)$

② $(-1, 0), (7, 0)$

③ $(1, 0), (-7, 0)$

④ $(-1, 0), (5, 0)$

⑤ $(1, 0), (-5, 0)$

해설

원의 중심을 $C(3, 2)$, 접점을 Q 라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{(a-3)^2 + 2^2}$$

CPQ 는 직각삼각형이므로

$$(a-3)^2 + 4 = 2^2 + 4^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a+1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0), (7, 0)$ 이다.

17. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

18. 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$

③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$

④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x - a)^2 + (y + 2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3 - a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1 + 2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

19. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1 y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

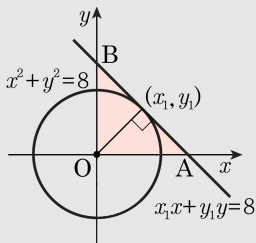
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, \quad x_1 y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1 y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



20. 점 $(-3, 1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 양인 직선의 방정식을 구하면?

① $2x + y - 5 = 0$

② $2x - y - 5 = 0$

③ $x - 2y + 5 = 0$

④ $x - 2y - 5 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 $(-3, 1)$ 을 지나므로

$$y = m(x + 3) + 1, \quad mx - y + 3m + 1 = 0$$

접선이므로 원의 중심과 직선사이의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$m = \frac{1}{2}, -2$$

$$m > 0 \text{ 이므로 } m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ 직선의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

21. 점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $P(a, b)$, $Q(a, 0)$, $O(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a > 0, b > 0$ 이라 하면

$\triangle POQ$ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

산술기하조건을 이용하면,

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$$

$$ab \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{넓이의 최댓값} : \frac{1}{4}$$

22. x 축 위의 두 점 $A(2, 0), B(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{3}$

④ 4

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $A(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
 $A'(0, 2)$

이때, 다음 그림에서

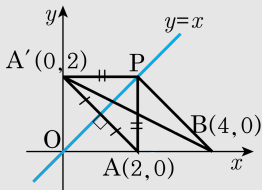
$$\overline{AP} = \overline{A'P}$$

$$\text{또, } \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B} \text{ 이}$$

므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



23. 두 점 $A(-5, -2)$, $B(2, 5)$ 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABP$ 의 무게중심 G 는 중심이 (a, b) 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ -1

⑤ 0

해설

$P = (\alpha, \beta)$ 라 하면,

$$G = \left(\frac{-5 + 2 + \alpha}{3}, \frac{-2 + 5 + \beta}{3} \right) \\ = \left(-1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right)$$

$-1 + \frac{\alpha}{3} = p$, $1 + \frac{\beta}{3} = q$ 라 하면,

$\alpha = 3p + 3$, $\beta = 3q - 3$, $\alpha^2 + \beta^2 = 9$ 이므로

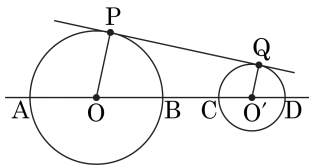
$$\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ 중심이 $(-1, 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

$$\therefore a + b + c = 1$$

24. 다음 그림과 같이 두 개의 원과 두 원의 중점 O, O' 을 지나는 직선과의 교점을 A, B, C, D 라 하고, 1 개의 공통외접선이 두 원에 접하는 점을 P, Q 라 하자. $\overline{OO'} = p, \overline{PQ} = q$ 라 할 때, $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은?



① $x^2 + 2px + q^2 = 0$

② $x^2 - 2px + q^2 = 0$

③ $x^2 - px + q = 0$

④ $x^2 - p^2x + q^2 = 0$

⑤ $x^2 - px + q^2 = 0$

해설

다음 그림에서 $\overline{OP} = r, \overline{O'Q} = r'$ 라 하고

점 O' 에서 $\overline{PQ}$ 와 평행한 직선과 $\overline{OP}$ 와의 교점을 R 이라 하자.

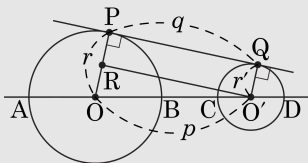
$$\overline{OR} = r - r', \overline{AC} = p + r - r',$$

$$\overline{BD} = p - r + r'$$

$$\therefore \overline{AC} + \overline{BD} = 2p$$

$$\therefore \overline{AC} \cdot \overline{BD} = p^2 - (r - r')^2 = \overline{O'R}^2 = q^2$$

$$\text{따라서 } x^2 - 2px + q^2 = 0$$



25. 원 $O : x^2 + y^2 = 1$, $O' : (x-4)^2 + y^2 = 4$ 와 직선 $l : \sqrt{3}x - y + 4 = 0$, 점 $A(2, \sqrt{5})$ 에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 원 O 위의 한 점에서 직선 l 에 이르는 거리의 최솟값은 1 이다.
 ㉡ 점 A 와 원 O' 위의 한 점 까지의 거리의 최댓값은 5 이다.
 ㉢ 두 원 O 와 O' 의 공통외접선의 길이를 α , 공통내접선의 길이를 β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은 22 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

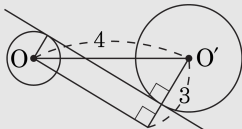
- ㉠. 최솟값은 원 중심에서 l 까지 거리에서 원 반지름을 뺀 값과 같다

$$\Rightarrow \frac{|4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} - 1 = 1 \text{ (참)}$$

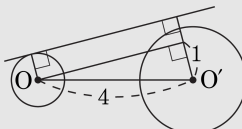
- ㉡. 최댓값은 $\overline{O'A}$ 길이에 반지름을 합한 값과 같다.

$$\Rightarrow \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} + 2 = 5 \text{ (참)}$$

- ㉢. 내접선 : $B = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$



$$\text{외접선 : } A = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$



$$\therefore A^2 + B^2 = 22 \text{ (참)}$$