

1. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

2. 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 이고 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 일 때, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때 $a < 0$ 이고,
 $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow ax^2 + ax - 6a \geq 0$

$$\therefore b = a, c = -6a$$

따라서, $f(x) = ax^2 + ax - 6a$ 이므로

$f(x) = 0$ 의 두 근은 $-3, 2$ 이다.

즉, $f(-3) = 0$ 또는 $f(2) = 0$ 이다.

한편, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는
 방정식 $f(3x - 2) = 0$ 의 실근과 같으므로

$f(3x - 2) = 0$ 의 두 근은

$$3x - 2 = -3 \text{ 또는 } 3x - 2 = 2 \text{에서}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}$$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

3. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 x 축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 값 또는 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$

② $k < -2$ 또는 $k > 2$

③ $k < -1$ 또는 $k > 1$

④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$

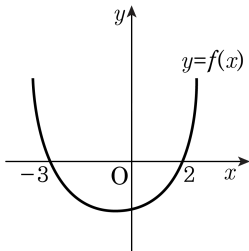
⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$
 $D = k^2 - 16 > 0$ 이어야 하므로 $(k + 4)(k - 4) > 0$
 $\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

4. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
 ④ 4 개 ⑤ 5 개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로
 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개 이다.

5. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4

② 2

③ -4

④ -2

⑤ 3

해설

$$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$$

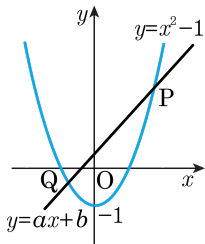
$$y = x \text{ 의 교점은 } x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$$

$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면
두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{(a - 2)^2}{2} = 0$$

$$\therefore a = 2$$

6. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$$(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = a(1 + \sqrt{2}) + b$$

$$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = a + b, \quad 2 = a$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 0$$