

1. 다음 중 이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, a, b 는 실수)
- ① 항상 x 축과 만난다.
 - ② 항상 x 축과 만나지 않는다.
 - ③ a, b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.
 - ④ a, b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.
 - ⑤ a, b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ 의 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a + b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \text{ 이므로 임의의 실수 } a, b \text{ 에 대하여 항상 실근을 갖는다.}$$

따라서, 이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

2. 포물선 $y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과 서로 만나지 않을 때의 k 의 범위를 구하면?

① $k < \frac{1}{2}$

② $k < -\frac{1}{2}$

③ $k > \frac{1}{4}$

④ $k < \frac{1}{4}$

⑤ $k > -\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과

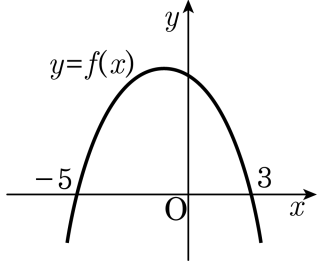
만나지 않으려면 판별식 D 가

$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 4k < 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{4}$$

3. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?

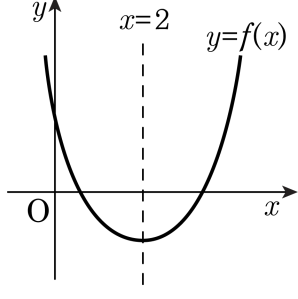


- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ ($a < 0$) 으로 놓으면
 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$
 $= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$ 이므로
 $\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서
 $x = -6$ 또는 $x = 10$
따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

4. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

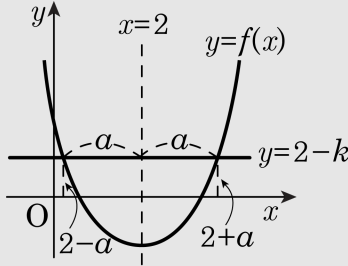
해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은

$$t = 2 - k \text{ 또는 } t = 2 + k$$

($0 < k < 2$)로 놓을 수 있다.

$$\therefore f(x) = 2 - k \text{ 또는 } f(x) = 2 + k$$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은
 $y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = 2 - a \text{ 또는 } x = 2 + a$$

(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도

마찬가지로 생각하면 $x = 2 - b$ 또는 $x = 2 + b$

따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은

$$(2 - a) + (2 + a) + (2 - b) + (2 + b) = 8$$