

1. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

2. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x 축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ 이라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 3k + 2$

잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$

이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$

$$k^2 - 12k - 17 = 0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 12이다.

3. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개

② 8 개

③ 10 개

④ 13 개

⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면

$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.

$$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$$

$$\Rightarrow k < 16$$

$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

4. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a , b 의 값을 구하면?

① $a = -1$, $b = -1$

② $a = -1$, $b = 0$

③ $a = 1$, $b = 0$

④ $a = 1$, $b = -1$

⑤ $a = 0$, $b = 1$

해설

$$y = ax^2 + bx + 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y = -x + 6 \quad \dots \textcircled{3}$$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로

②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.

②, ③을 연립하여 풀면

교점은 $(2, 4)$, $(-1, 7)$ 이고,

이 두 점을 곡선 ①이 지나므로

$$4a + 2b + 8 = 4, \quad a - b + 8 = 7$$

$$\therefore a = -1, \quad b = 0$$