1. 부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$이고 $f(x)=ax^2+bx+c$일 때, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$일 때 $a<0$이고,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c \geq 0 &\Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2+ax-6a \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ b=a,\ c=-6a$

따라서, $f(x)=ax^2+ax-6a$이므로

$f(x)=0$ 의 두 근은 $-3,\ 2$이다.

즉, $f(-3)=0$ 또는 $f(2)=0$이다.

한편, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는

방정식 $f(3x-2)=0$의 실근과 같으므로

$f(3x-2)=0$의 두 근은

$3x-2=-3$ 또는 $3x-2=2$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

2. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$의 그래프와 직선 $y = 5x + b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 $(3,\ 17)$일 때, $a + b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$의 두 실근이다.
$2x^2 + (a - 5)x + 12 - b = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{a-5}{2} \cdots\cdots ㉠$$

또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 3 \text{에서 } \alpha + \beta = 6 \cdots\cdots ㉡$$

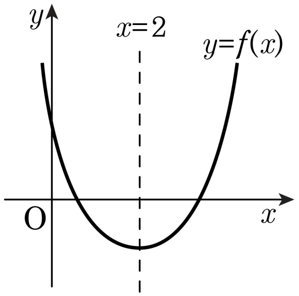
㉠, ㉡에서 $-\dfrac{a-5}{2} = 6$

$\therefore a = -7$

또, 점 $(3,\ 17)$은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b$ $\therefore$ $b = 2$

$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

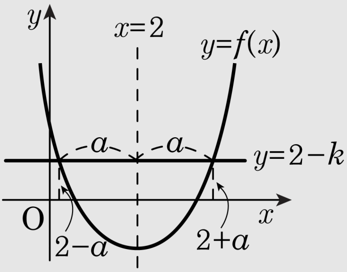
3. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$를 만족시키는 x의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$의 교점의 x좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
(ii) $f(x) = 2 + k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$