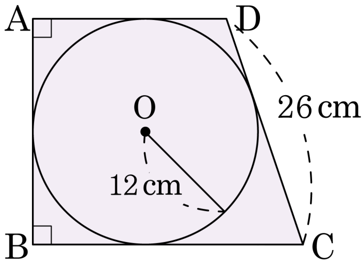
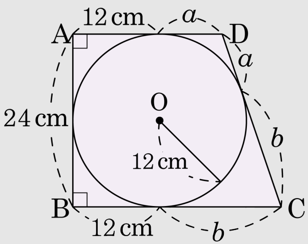
1. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 12cm 인 원 O 에 외접하는 사각형 ABCD 의 넓이는?



① 600cm^2 ② 640cm^2 ③ 720cm^2
④ 800cm^2 ⑤ 850cm^2

해설



접선의 성질에 따라 그림처럼 같은 길이의 관계가 성립한다.

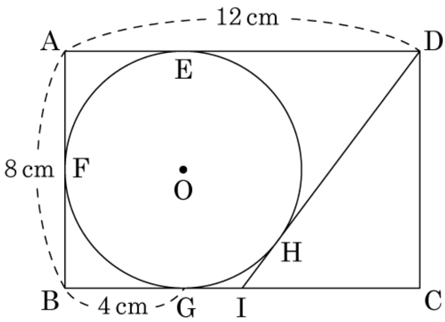
$\square$ABCD 의 넓이 $= \dfrac{1}{2}\{(12+a)+(12+b)\} \times 24$

$= 12(24+a+b)$

$a+b=26(\text{ cm})$ 이므로

구하는 넓이는 $12 \times (24+26) = 600(\text{ cm}^2)$ 이다.

2. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 의 세 변의 접하는 원 O 가 있다. $\overline{\mathrm{DI}}$ 가 원의 접선이고 네 점 E, F, G, H 가 접점일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



① $\overline{\mathrm{AE}}$ 의 길이는 $4\,\mathrm{cm}$ 이다.

② $\overline{\mathrm{DH}}$ 의 길이의 길이는 $8\,\mathrm{cm}$ 이다.

③ $\overline{\mathrm{GI}} = 2\,\mathrm{cm}$ 이다.

④ $\overline{\mathrm{CI}} = 4\,\mathrm{cm}$ 이다.

⑤ $\triangle\mathrm{CDI}$ 의 넓이는 $24\,\mathrm{cm}^2$ 이다.

해설

③ $\overline{\mathrm{GI}} = x$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{CI}}$ 의 길이는 $\overline{\mathrm{CI}} = (8 - x)\,\mathrm{cm}, \overline{\mathrm{DI}} = (8 + x)\,\mathrm{cm}$ 이므로

피타고라스의 성질에 의해

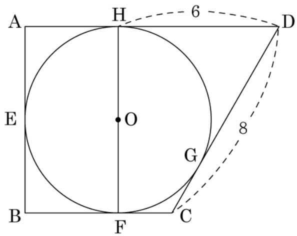
$(8 + x)^2 = 8^2 + (8 - x)^2$

$\therefore x = 2\,\mathrm{cm}$

④ $\overline{\mathrm{CI}} = 8 - x = 6$

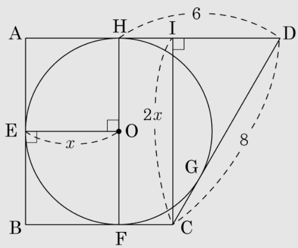
⑤ $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24(\mathrm{cm}^2)$

3. 다음 그림과 같이 원 O 의 외접사각형 ABCD 에서 네 점 E, F, G, H 는 접점이고 선분 HF 는 원 O 의 지름이다. $\overline{CD} = 8, \overline{DH} = 6$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이는?



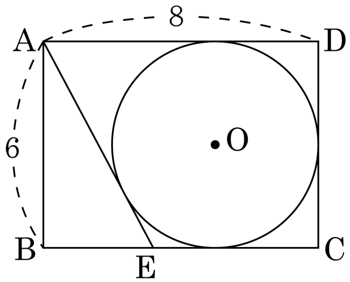
① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설



그림에서 반지름의 길이를 x 라 하고 C 에서 $\overline{AD}$ 에 내린 수선의 발을 I 라 하자.
$\overline{CI} = 2x$, $\overline{DH} = 6$ 이므로 $\overline{DG} = 6$, $\overline{HI} = \overline{CF} = \overline{CG} = 2$ 이고
$\overline{DI} = 4$
$\triangle CDI$ 에서 $(2x)^2 + 4^2 = 8^2$ $\therefore\ x = 2\sqrt{3}$

4. 다음 그림에서 □ABCD 는 $\overline{AB}=6,\ \overline{AD}=8$ 직사각형이다. 원 O 가 □AECD 에 내접할 때, $\overline{BE}$ 의 길이를 구하여라.

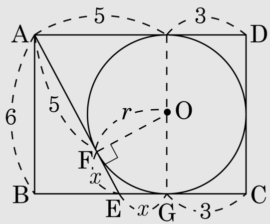


▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{16}{5}$

해설

원 O 의 반지름의 길이를 r 라 하면



$2r=6,\ r=3$

$\overline{FE}=\overline{EG}=\ x(x<5)$ 라 하면

$\overline{BE}+\overline{EC}=8$ 이므로 $\overline{BE}=5-x$ 이다.

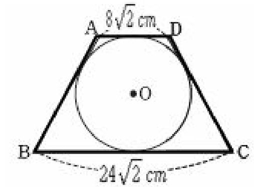
△ABE 에서

$(5+x)^2=(5-x)^2+36,\ 20x=36$

$\therefore x=\dfrac{9}{5}$

$\therefore \overline{BE}=5-\dfrac{9}{5}=\dfrac{16}{5}$

5. 다음 그림과 같이 원 O 에 외접하는 등변사다리꼴 ABCD 가 있다. $\overline{AD} = 8\sqrt{2}$cm , $\overline{BC} = 24\sqrt{2}$cm 일 때, 내접원 O 의 넓이는?



① $69\pi \mathrm{cm}^2$　② $69\sqrt{2}\pi \mathrm{cm}^2$　③ $96\pi \mathrm{cm}^2$

④ $96\sqrt{2}\pi \mathrm{cm}^2$　⑤ $8\sqrt{6}\pi \mathrm{cm}^2$

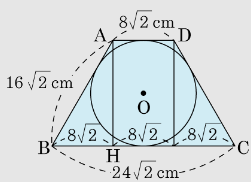
해설

$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{AB}$ $\therefore$ $\overline{AB} = 16\sqrt{2}(\mathrm{cm})$

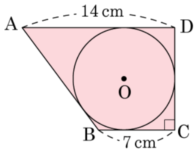
$\overline{AH} = \sqrt{\left(16\sqrt{2}\right)^2 - \left(8\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{6}(\mathrm{cm})$

$\therefore$ 원의반지름은$4\sqrt{6}$ (cm)

(원의 넓이) $= \pi \times (4\sqrt{6})^2 = 96\pi(\mathrm{cm}^2)$



6. 다음 그림에서 □ABCD 에 내접하는 원 O 의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ **답 :** ______ cm

▷ **정답 :** $\frac{28}{3}\pi$ cm

해설

반지름을 $r$cm라 하면

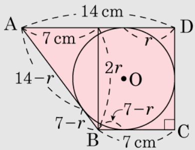
$(14-r+7-r)^2 = 7^2 + (2r)^2$

$(21-2r)^2 = 49 + 4r^2$

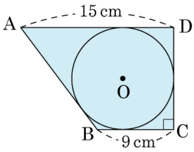
$441 - 84r + 4r^2 = 49 + 4r^2 84r = 392$

$\therefore r = \frac{392}{84} = \frac{14}{3}(\text{cm})$

$(\text{원의 둘레}) = 2\pi \times \frac{14}{3} = \frac{28}{3}\pi(\text{cm})$



7. 다음 그림에서 □ABCD 에 내접하는 원 O 의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : $\dfrac{45}{4}\pi$ cm

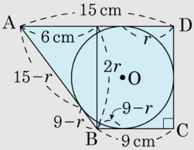
해설

반지름의 길이를 $r cm$라 하면 $(15-r+9-r)^2 = 6^2+(2r)^2$, $(24-2r)^2 = 36+4r^2$

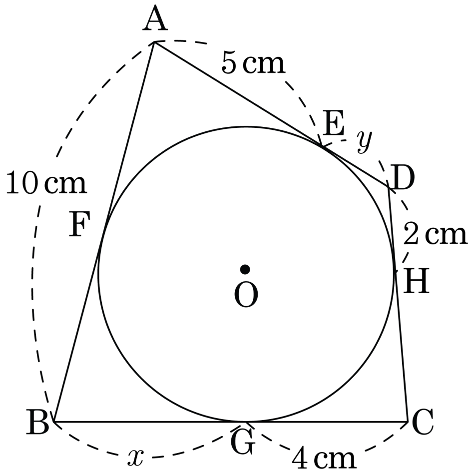
$576-96r+4r^2 = 36+4r^2$

$\therefore r = \dfrac{45}{8}(cm)$

(원의 둘레의 길이) $= 2\pi \times \dfrac{45}{8} = \dfrac{45}{4}\pi\,(\mathrm{cm})$



8. 다음 그림과 같이 □ABCD가 원 O에 외접할 때, x, y의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▶ 답 : cm

▷ 정답 : $x = 5$ cm

▷ 정답 : $y = 2$ cm

해설

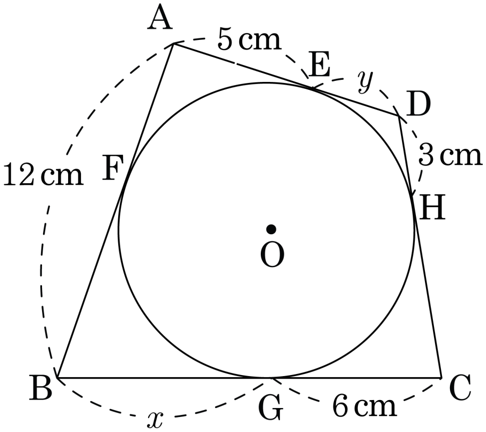
$\overline{AF} = \overline{AE} = 5(\text{cm})$

$\overline{DH} = \overline{ED} = 2(\text{cm})$

$\overline{BF} = \overline{BG} = 5(\text{cm})$

$\therefore\ x = 5(\text{cm}),\ y = 2(\text{cm})$

9. 다음 그림과 같이 □ABCD가 원 O에 외접할 때, $x+y$의 값은?



① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

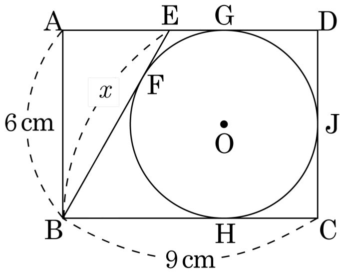
$\overline{AF}=\overline{AE}=5(\text{cm})$

$\overline{DH}=\overline{ED}=3(\text{cm})$

$\overline{BF}=\overline{BG}=7(\text{cm})$

따라서 $x=7(\text{cm}),\ y=3(\text{cm})$

10. 다음 그림과 같이 원 O 가 직사각형 □ABCD 의 세 변과 $\overline{BE}$ 에 접할 때, x 의 값을 구하여라. (단, F, G, H, I 는 접점)



▶ 답 : cm

▷ 정답 : $\dfrac{15}{2}$ cm

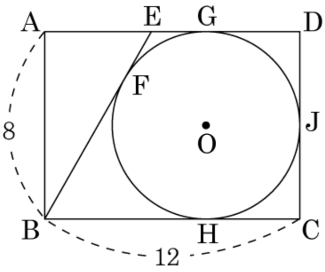
해설

$\overline{ED}+\overline{BC}=\overline{EB}+\overline{DC}$ 이므로 $\overline{ED}+9=x+6$ 이다. 따라서 $\overline{ED}=x-3$ 이다.

$\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}=9-(x-3)=12-x$ 이므로 직각삼각형 ABE 에서 $x^2=(12-x)^2+6^2$ 이다.

따라서 $x=\dfrac{15}{2}(\text{cm})$ 이다.

11. 다음 그림과 같이 원 O 가 직사각형 ABCD 의 세 변과 $\overline{BE}$ 에 접할 때, $\overline{BE}$ 의 길이를 구하여라. (단, F, G, H, J 는 접점)



▶ 답 :

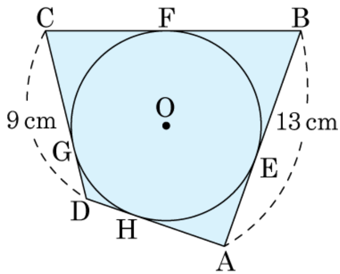
▷ 정답 : 10

해설

$\overline{ED}+\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{DC}$ 이므로 $\overline{ED}+12=\overline{BE}+8$ 이다. 따라서 $\overline{ED}=\overline{BE}-4$ 이다.

$\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}=12-(\overline{BE}-4)=16-\overline{BE}$ 이므로 직각삼각형 ABE 에서 $\overline{BE^2}=(16-\overline{BE})^2+8^2$ 이다. 따라서 $\overline{BE}=10$ 이다.

12. 다음 그림과 같이 반지름이 4 cm 인 원 O 에 외접하는 사각형 ABCD 의 각 변과 원 O 의 접점을 E, F, G, H 라 할 때, 사각형의 넓이를 구하여라.

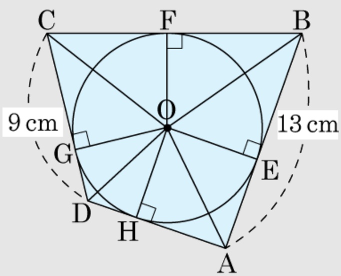


▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad}$ cm^2

▷ 정답 : 88 $\underline{\text{cm}^2}$

해설

외접 사각형의 성질에 의해서 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} = 22\,\text{cm}$



또한, 원의 반지름과 사각형의 모든 변은 수직으로 만나므로

(사각형의 넓이)

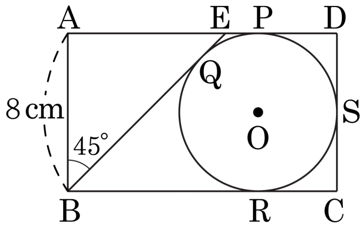
$= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA$

$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{DA} \times r$

$= \frac{1}{2} \times r \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 44 = 88(\text{cm}^2)$

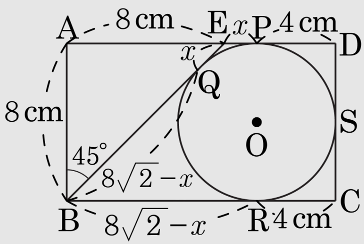
13. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 8\text{cm}$ 인 직사각형 ABCD 의 세 변과 $\overline{BE}$ 에 접하는 원 O 에 대하여 $\angle ABE = 45°$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

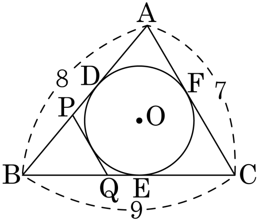
▷ 정답 : $32 + 8\sqrt{2}$ cm

해설



그림과 같이 $\overline{EP} = x$ 라고 하면 $\overline{EQ} = \overline{EP} = x$ 이고, 직각이등변삼각형 ABE 에서 $\angle ABE = 45°$ 이므로 $\overline{BE} = 8\sqrt{2}$,
$\overline{BQ} = \overline{BR} = 8\sqrt{2} - x$
$\overline{AD} = x + 12$,
$\overline{BC} = 8\sqrt{2} + 4 - x$ 이므로 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 에서
$x + 12 = 8\sqrt{2} + 4 - x \qquad \therefore\ x = (4\sqrt{2} - 4)$
$\therefore\ \overline{AD} = 12 + 4\sqrt{2} - 4 = 8 + 4\sqrt{2}$
따라서 직사각형의 둘레의 길이는
$(8 + 8 + 4\sqrt{2}) \times 2 = (32 + 8\sqrt{2})\text{cm}$ 이다.

14. 다음 그림과 같이 세 변 AB, BC, CA 의 길이가 각각 8, 9, 7 인 $\triangle$ABC 에 내접하는 원 O 에 대하여 D, E, F 는 접점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 원 O 에 접할 때, $\triangle$PBQ 의 둘레의 길이를 구하여라.

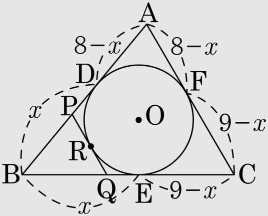


▶ **답 :**

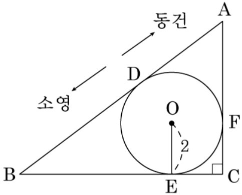
▷ **정답 :** 10

해설

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{BD}} = x$ 라 하면
$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AF}} = 8-x$, $\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{CF}} = 9-x$,
$\overline{\mathrm{AC}} = (8-x)+(9-x) = 17-2x = 7$
$\therefore x = 5$
이때 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 와 원 O 의 접점을 R 라 하면
$\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{PD}}$, $\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{QE}}$ 이므로 $\triangle$PBQ 의 둘레의 길이는 $2\overline{\mathrm{BD}}$ 이다.
$\therefore\ 2\overline{\mathrm{BD}} = 2x = 2\times 5 = 10$



15. 소영이와 동건이는 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 2 인 원 모양의 정원에 접해 있는 직각삼각형 모양의 산책로를 걷고 있다. 소영이는 D 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 E 지점까지 가고, 동건이는 D 지점을 출발하여 A 지점을 지나 E 지점 까지 갔다. 소영이의 속력과 동건이의 속력과 두 사람이 걸린 시간이 같을 때, 이 산책로의 전체 길이를 구하여라. (단, 점 D, E, F 는 접점이다.)



▶ **답 :**

▷ **정답 :** 24

해설

$\overline{AD}=\overline{AF}=x,\ \overline{BD}=\overline{BE}=y$ 라 하면

$\overline{AD}+\overline{AF}+\overline{FC}+\overline{CE}=\overline{BD}+\overline{BE}$ 이므로

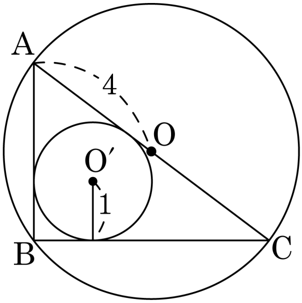
$x+x+2+2=y+y \therefore\ y=x+2\cdots①$

$\triangle ABC$ 에서 $(x+2)^2+(y+2)^2=(x+y)^2 \therefore\ 2x+2y+4=xy\cdots②$

①, ②에서 $x^2-2x-8=0 \therefore\ x=4(\because x>0),\ y=6$

따라서 산책로 전체의 길이는 $2x+2y+4=24$ 이다.

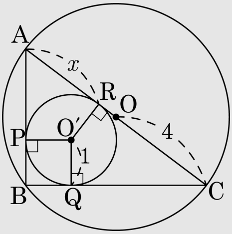
16. 다음 그림과 같이 $\overline{AC}$ 가 지름인 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 외접원이고 원 O′ 는 내접원이다. 원 O 와 원 O′ 의 반지름의 길이가 각각 4, 1 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설



원 O′ 과 $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 의 접점을 각각 P, Q, R 이라 하고

$\overline{AP} = \overline{AR} = x$ 라 하면 $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{BC} = 9 - x$ 이므로

$\triangle ABC$ 에서

$8^2 = (x+1)^2 + (9-x)^2$

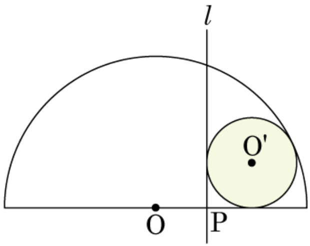
$2x^2 - 16x + 18 = 0$

$\therefore x = 4 - \sqrt{7} (\because 0 < x < 4)$

$\therefore \overline{AB} = 4 - \sqrt{7} + 1 = 5 - \sqrt{7}$, $\overline{BC} = 9 - (4 - \sqrt{7}) = 5 + \sqrt{7}$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times (5 - \sqrt{7}) \times (5 + \sqrt{7}) = 9$

17. 다음 그림과 같이 반지름이 $\frac{5}{2}$ 인 반원 O 의 지름 위에 $\overline{OP}=\frac{7}{10}$ 인 점 P 를 지나면서 지름에 수직인 직선 l 을 그었을 때, 직선 l 과 반원 O 에 접하는 원 O′ 의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{5}$

해설

원 O′ 의 반지름을 x 라 하면

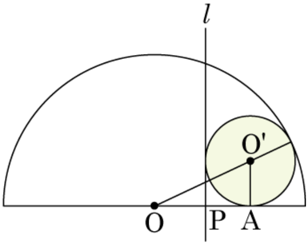
$\overline{OO'}=\frac{5}{2}-x$

$\overline{OA}=\frac{7}{10}+x$

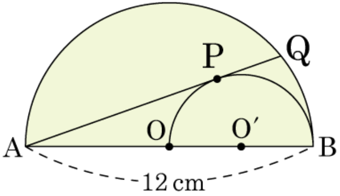
$\left(\frac{5}{2}-x\right)^2=\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+x^2$

$25x^2+160x-144=0$

$\therefore\ x=\frac{4}{5}(\because\ x>0)$



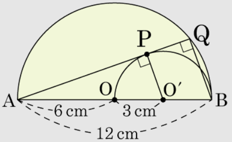
18. $\overline{AB}=12\text{cm}$ 를 지름으로 하는 반원 O 안에 $\overline{OB}$ 를 지름으로 하는 반원 O′ 이 있다. $\overline{AQ}$ 가 반원 O′ 의 접선이며 점 P 가 접점이라 할 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{5}\text{cm}$　② $6\sqrt{6}\text{cm}$　③ $7\sqrt{5}\text{cm}$

④ $8\sqrt{2}\text{cm}$　⑤ $8\sqrt{3}\text{cm}$

해설



$\overline{AO'}^2+\overline{O'P}^2=\overline{AP}^2$ 이므로

$9^2=3^2+\overline{AP}^2$ $\therefore \overline{AP}=6\sqrt{2}\text{ cm}$

$\angle APO'=90°$, 지름에 대한 원주각인 $\angle Q=90°$

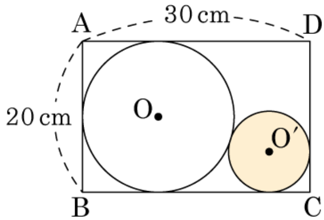
$\therefore \triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$

$\overline{AP}:\overline{AQ}=\overline{AO'}:\overline{AB}$

$6\sqrt{2}:\overline{AQ}=9:12=3:4$

$\therefore \overline{AQ}=\dfrac{4}{3}\times 6\sqrt{2}=8\sqrt{2}(\text{ cm})$

19. 다음 그림에서 원 O 는 직사각형 ABCD 에 내접하는 큰 원이고 원 O′ 은 그 나머지 부분에 내접하는 작은 원이다. 원 O′ 의 넓이는?

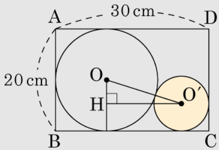


① $400(10-17\sqrt{3})\text{cm}^2$　② $400(7-4\sqrt{3})\text{cm}^2$

③ $420(10-19\sqrt{3})\text{cm}^2$　④ $400(100-20\sqrt{3})\text{cm}^2$

⑤ $410(10-21\sqrt{3})\text{cm}^2$

해설



그림과 같이 보조선을 그어 $\triangle$O′OH 에서

$\overline{OO'}=10+x$

$\overline{OH}=10-x$

$\overline{O'H}=20-x$

$\overline{OO'}^2=\overline{OH}^2+\overline{O'H}^2$ 에서

$(10+x)^2=(10-x)^2+(20-x)^2$

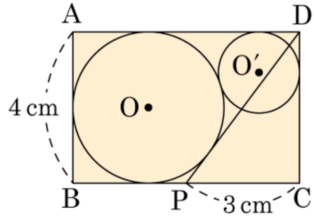
$x^2-80x+400=0$

$x=40\pm20\sqrt{3}$

x 는 30 보다 작으므로 $x=(40-20\sqrt{3})$ cm 이다.

$\therefore$ (원 O′ 의 넓이)$=\pi(40-20\sqrt{3})^2=400(7-4\sqrt{3})(\text{cm}^2)$

20. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 직사각형이고, $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{PC} = 3\text{cm}$ 이다. 사각형 ABPD 가 원 O 에 외접하고 원 O′ 은 원 O 에 접하고, 변 AD, CD 에 접한다. 원 O′ 의 반지름은?



① $(8 + 4\sqrt{3})$ cm ② $(8 - 4\sqrt{3})$ cm ③ $(4 + 2\sqrt{3})$ cm

④ $(4 - 2\sqrt{3})$ cm ⑤ 1 cm

해설

$\overline{FP} = \overline{GP} = x\text{cm}$ 라 하자.

△DPC 에서

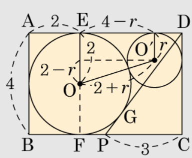
$$\overline{DP} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$$

$\overline{DG} = 5 - x(\text{cm})$

또 $\overline{ED} = \overline{FC} = \overline{FP} + \overline{PC} = x + 3(\text{cm})$

$\overline{ED} = \overline{DG}$ 이므로 $x + 3 = 5 - x$, $x = 1$

$\therefore \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = 2 + 4 = 6$ (cm)



원 O′ 의 반지름을 $r\text{cm}$ 라 하면

$(2 + r)^2 = (2 - r)^2 + (4 - r)^2$

$r^2 - 16r + 16 = 0$

$\therefore r = 8 - 4\sqrt{3} (\because 0 < r < 2)$