1. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ 3　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x-a)^2 + (y-1)^2 = 5^2$
이 점$(0, -3)$ 을 지나므로 $(0-a)^2 + (-3-1)^2 = 25$
$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

2. 두 점 A$(-3,\ 4)$, B$(1,\ -2)$ 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$　② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$
③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$　④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

A$(-3,\ 4)$, B$(1,\ -2)$가 지름의 양 끝점이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점이 원의 중심 O$(-1,\ 1)$ 이고,
$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\mathrm{r}$
반지름 $r=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$
$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$
$\therefore$ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

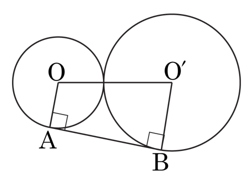
3. 원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 이 점 $(-3,\ 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$
이 점 $(-3,4)$ 를 지나므로
$9+16+6-16a+b=0$
$\therefore\ 16a-b=31\ \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 은
$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$ 이고
원이 x 축에 접하므로
$2a=\sqrt{4a^2-b+1},\ 4a^2=4a^2-b+1$
$\therefore\ b=1\ \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31$
$\therefore\ a=2 \qquad \therefore\ a+b=2+1=3$

4. 다음 그림의 두 원 O 와 O′ 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{OO'} = 5\,\mathrm{cm}$, $\overline{OA} = 2\,\mathrm{cm}$, $\overline{O'B} = 3\,\mathrm{cm}$ 이다.)



① $\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$ ② $2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ ③ $2\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$
④ $\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ ⑤ $3\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3-2)^2} = 2\sqrt{6}(\mathrm{cm})$

5. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

6. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

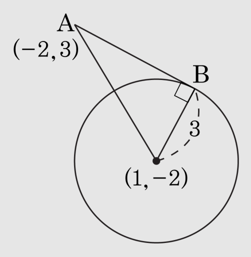
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



7. 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 (2, 3) 에서의 접선의 방정식은 $ax+by=13$ 이다. $a+b$ 의 값은?

① −13 ② −1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 5

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x+y_1y=r^2$ 을 이용하면,

$2x+3y=13$ $a=2, b=3$ $\therefore$ $a+b=5$

8. 점 P를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(3,\ -5)$라 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(0,\ -3)$　② $(-3,\ 0)$　③ $(6,\ -7)$
④ $(-7,\ 6)$　⑤ $(-6,\ 7)$

해설

$P(a,\ b)$를 조건에 의하여 이동하면 $(a+3,\ b-2)=(3,\ -5)$
따라서 $a=0,\ b=-3$

9. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

10. 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 y 절편은?

① $\pm\sqrt{2}$ ② $\pm\sqrt{3}$ ③ $\pm\sqrt{5}$

④ $\pm2\sqrt{3}$ ⑤ $\pm2\sqrt{5}$

해설

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2

원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 기울기가 -2 인

직선의 방정식은 $y=-2x\pm2\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 $\pm2\sqrt{5}$

11. (1, 2) 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선 중 y축에 평행하지 않는 직선의 방정식은?

① $3x+4y+5=0$　　② $3x+4y-5=0$
③ $3x-4y+5=0$　　④ $3x-4y-5=0$
⑤ $3x+y+1=0$

해설

점$(1, 2)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면
$y=m(x-1)+2$ ⋯ ㉠
㉠과 원 중심사이 거리는 반지름과 같으므로
$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$
$(m-2)^2=m^2+1$
$m=\frac{3}{4}$
∴ 접선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$, $3x-4y+5=0$

12. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

13. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle\mathrm{AOB} = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

14. 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(8,\ 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

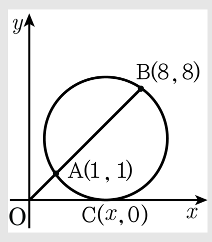
해설

다음 그림에서

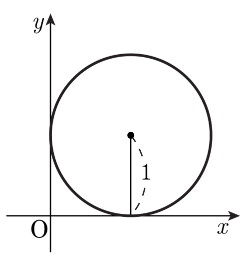
$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$



15. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은
k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다.
이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

16. 점 $(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 의 중심과 일치하였다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

점 $(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a+1, b-2)$
이때, 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서
$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 이므로
이 원의 중심은 $(-2, 2)$ 이다.
점 $(a+1, b-2)$ 와 점 $(-2, 2)$ 가 일치하므로
$a+1=-2, b-2=2$ 에서
$a=-3,\quad b=4 \qquad \therefore a+b=1$

17. 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 제 4 사분면의 점이 되었다.
점 $\left(\frac{a}{b},\ a+b\right)$ 는 제 몇 사분면에 존재하는가?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면
⑤ x 축 위의 점이다.

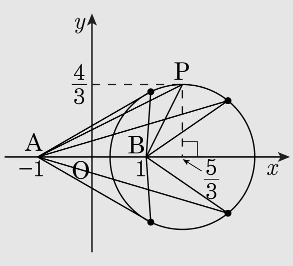
해설

점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(a,\ -b)$ 이고, 이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $(-b,\ a)$ 이다.
즉, 점 $(-b,\ a)$가 제4 사분면의 점이므로
$-b>0,\ a<0 \quad \therefore\ a<0,\ b<0$
따라서 $\frac{a}{b}>0,\ a+b<0$ 이므로 점 $\left(\frac{a}{b},\ a+b\right)$ 는 제4 사분면에 존재한다.

18. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle$PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, $\triangle$PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

19. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y=7$의 공통현의 길이를 구하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2=1$은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.
$x^2+y^2-6x-6y=7$은 중심이 $(3,3)$이고 반지름이 5인 원이다.
공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x-6y-7)=0$
$\therefore\ x+y+1=0$
이때, $x^2+y^2=1$의 원과 $x+y+1=0$의 교점을 구하면
$(0,\ -1)$, $(-1,\ 0)$에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

20. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교하도록 하는 a의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $3,\ 1$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

21. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 의 공통접선의 y 절편은?

① $\frac{26}{5}$　② $\frac{21}{4}$　③ $\frac{16}{3}$　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 $(0,\ 0)$ 에서 접선까지의 거리가 4 ,
중심 $(0,\ 4)$ 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\frac{|-4 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

두 식을 연립하여 풀면
$4|-4 + n| = |n|$
$4(-4 + n) = \pm n$
$\therefore n = \frac{16}{5},\ \frac{16}{3}$ $n > 5$ 이므로
구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$

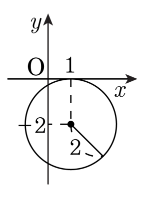
22. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

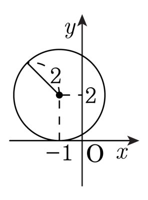
① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

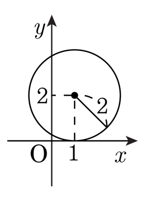
해설

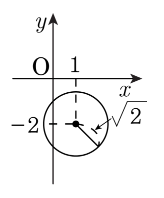
x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
$(x-m)+2(y-n)-1=0,\ x+2y-m-2n-1=0$ 을
$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
$-m-2n=-3\ \cdots$ ㉠
점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
$(1+m,\ 2+n)$
$\Rightarrow\ \ 1+m=a,\ \ 2+n=b$
$\Rightarrow\ \ a+2b=m+1+4+2n=8$
($\because$ ㉠에서 $m+2n=3$)

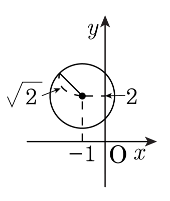
23. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

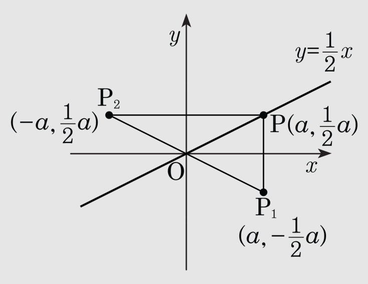
$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

$\therefore$ 중심은 $(1, -2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

24. 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점 P(a, b) 를 x 축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2 라 하자. $\triangle PP_1P_2$ 의 넓이가 4일 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



점 $P(a,\ b)$가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$, x축 대칭 : $P_1\left(a,\ -\frac{1}{2}a\right)$, y축 대칭 : $P_2\left(-a,\ \frac{1}{2}a\right)$

$\triangle PP_1P_2$는 $\angle P_1PP_2 = 90°$ 인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} \times \frac{1}{2}$ 이다.

$\overline{PP_1} = a$, $\overline{PP_2} = 2a$

$\therefore a \times 2a \times \frac{1}{2} = 4$

$a = \pm 2$

$a > 0$ 이므로 $a = 2,\ b = \frac{1}{2}a = 1$

$\therefore a + b = 3$

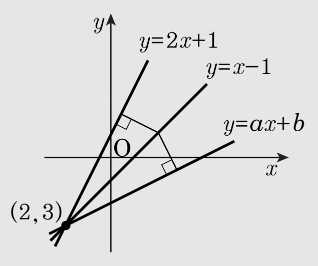
25. 직선 $y = 2x+1$ 을 직선 $y = x-1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$　　② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y + 3 = 0$　　④ $2x - 3y + 4 = 0$

⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과$y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.
$\therefore 3 = 2a + b$
ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서
$y = 2x + 1$,　$y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.
$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a+0+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

i) 에서 구한
$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면
$a = 2,\ \ b = 1$ 또는 $a = \frac{1}{2},\ \ b = -2$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x - 2$$

($\because$ $y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)