

1. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인

원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$

$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

2. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$

② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$

④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1)이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned}\text{반지름 } r &= \overline{OA} = \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

∴ 원의 방정식은 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$

3. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0$ 이 점 $(-3, 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0$$

이 점 $(-3, 4)$ 를 지나므로

$$9 + 16 + 6 - 16a + b = 0$$

$$\therefore 16a - b = 31 \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0 \text{ 은}$$

$$(x-1)^2 + (y-2a)^2 = 4a^2 - b + 1 \text{ 이고}$$

원이 x 축에 접하므로

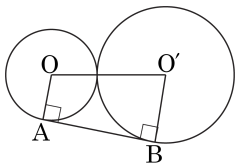
$$2a = \sqrt{4a^2 - b + 1}, \quad 4a^2 = 4a^2 - b + 1$$

$$\therefore b = 1 \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면 $16a - 1 = 31$

$$\therefore a = 2 \qquad \therefore a + b = 2 + 1 = 3$$

4. 다음 그림의 두 원 O 와 O' 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면?
(단, $\overline{OO'} = 5\text{ cm}$, $\overline{OA} = 2\text{ cm}$, $\overline{O'B} = 3\text{ cm}$ 이다.)



① $\sqrt{6}\text{ cm}$

② $2\sqrt{5}\text{ cm}$

③ $2\sqrt{6}\text{ cm}$

④ $\sqrt{5}\text{ cm}$

⑤ $3\sqrt{5}\text{ cm}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3 - 2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$$

5. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

6. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

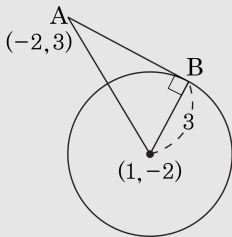
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



7. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은 $ax + by = 13$ 이다. $a + b$ 의 값은?

① -13

② -1

③ 0

④ 4

⑤ 5

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하면,

$2x + 3y = 13$ $a = 2, b = 3 \quad \therefore a + b = 5$

8. 점 P를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(3, -5)$ 라 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(0, -3)$

② $(-3, 0)$

③ $(6, -7)$

④ $(-7, 6)$

⑤ $(-6, 7)$

해설

$P(a, b)$ 를 조건에 의하여 이동하면 $(a + 3, b - 2) = (3, -5)$
따라서 $a = 0, b = -3$

9. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선의 y 절편은?

① $\pm \sqrt{2}$

② $\pm \sqrt{3}$

③ $\pm \sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{3}$

⑤ $\pm 2\sqrt{5}$

해설

직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2

원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 기울기가 -2 인

직선의 방정식은 $y = -2x \pm 2\sqrt{(-2)^2 + 1}$

$$\therefore y = -2x \pm 2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 $\pm 2\sqrt{5}$

11. (1, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선 중 y 축에 평행하지 않는 직선의 방정식은?

① $3x + 4y + 5 = 0$

② $3x + 4y - 5 = 0$

③ $3x - 4y + 5 = 0$

④ $3x - 4y - 5 = 0$

⑤ $3x + y + 1 = 0$

해설

점(1, 2)를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면

$$y = m(x - 1) + 2 \quad \cdots \text{㉠}$$

㉠과 원 중심사이 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$(m - 2)^2 = m^2 + 1$$

$$m = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, \quad 3x - 4y + 5 = 0$$

12. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

13. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8, b = -6, c = 0$

$\therefore abc = 0$

14. 좌표평면 위의 두 점 $(1, 1)$, $(8, 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{11}{2}$

⑤ 4

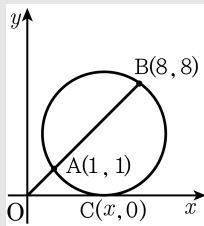
해설

다음 그림에서

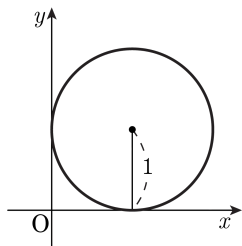
$$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\therefore x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$$

$$\therefore x = 4$$



15. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k - 1 + k - 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$$

$$|2k - 3| = \sqrt{k^2 + 1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

16. 점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하였더니 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 의 중심과 일치하였다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 1 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a + 1, b - 2)$$

이때, 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ 이므로}$$

이 원의 중심은 $(-2, 2)$ 이다.

점 $(a + 1, b - 2)$ 와 점 $(-2, 2)$ 가 일치하므로

$$a + 1 = -2, b - 2 = 2 \text{ 에서}$$

$$a = -3, b = 4 \quad \therefore a + b = 1$$

17. 좌표평면 위의 점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 제 4 사분면의 점이 되었다.

점 $\left(\frac{a}{b}, a+b\right)$ 는 제 몇 사분면에 존재하는가?

- ① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면
⑤ x 축 위의 점이다.

해설

점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(a, -b)$ 이고,
이 점을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $(-b, a)$ 이다.

즉, 점 $(-b, a)$ 가 제4 사분면의 점이므로

$$-b > 0, a < 0 \quad \therefore a < 0, b < 0$$

따라서 $\frac{a}{b} > 0, a + b < 0$ 이므로 점 $\left(\frac{a}{b}, a + b\right)$ 는 제4사분면에 존재한다.

18. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2 : 1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle PAB$ 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$$

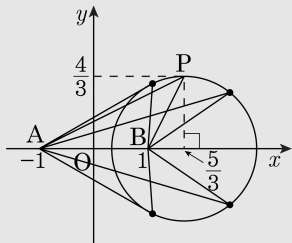
$$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, $\triangle PAB$ 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.



19. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 은 중심이 $(3, 3)$ 이고 반지름이 5인 원이다.

공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7) = 0$$

$$\therefore x + y + 1 = 0$$

이때, $x^2 + y^2 = 1$ 의 원과 $x + y + 1 = 0$ 의 교점을 구하면

$(0, -1)$, $(-1, 0)$ 에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

20. 두 원 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y+a)^2 = 1$ 이 직교하도록 하는 a 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 2)$, $(1, -a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2 + (2+a)^2}$ 이다.

두 원의 반지름은 각각 3, 1이므로

직교하기 위한 조건은

$$(a-1)^2 + (2+a)^2 = 3^2 + 1^2$$

$$\therefore 2a^2 + 2a - 5 = 0$$

근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

21. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 의 공통접선의 y 절편은?

① $\frac{26}{5}$

② $\frac{21}{4}$

③ $\frac{16}{3}$

④ $\frac{11}{2}$

⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 (0, 0) 에서 접선까지의 거리가 4,
중심 (0, 4) 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\frac{|-4 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$4|-4 + n| = |n|$$

$$4(-4 + n) = \pm n$$

$$\therefore n = \frac{16}{5}, \frac{16}{3} \quad n > 5 \text{ 이므로}$$

구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$

22. 점 $(1, 2)$ 를 점 (a, b) 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

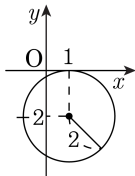
해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
 $(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$ 을
 $x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
 $-m-2n=-3 \cdots \textcircled{7}$

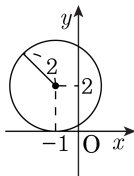
점 $(1, 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
 $(1+m, 2+n)$
 $\Rightarrow 1+m=a, 2+n=b$
 $\Rightarrow a+2b=m+1+4+2n=8$
($\because \textcircled{7}$ 에서 $m+2n=3$)

23. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?

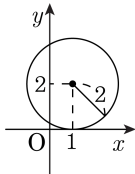
①



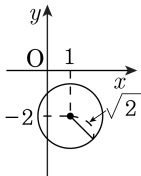
②



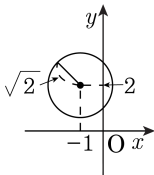
③



④



⑤



해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$$

$\therefore$ 중심은 $(1, -2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

24. 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점 $P(a, b)$ 를 x 축, y 축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1 , P_2 라 하자. $\triangle PP_1P_2$ 의 넓이가 4 일 때, 두 양수 a , b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

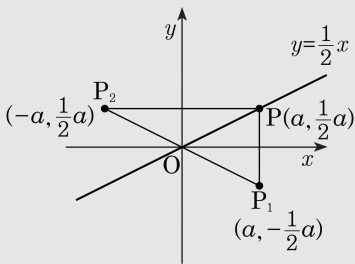
② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설



점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 $P\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, x 축 대칭 : $P_1\left(a, -\frac{1}{2}a\right)$, y 축 대칭 : $P_2\left(-a, \frac{1}{2}a\right)$

$\triangle PP_1P_2$ 는 $\angle P_1PP_2 = 90^\circ$ 인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} \times \frac{1}{2}$ 이다.

$$\overline{PP_1} = a, \overline{PP_2} = 2a$$

$$\therefore a \times 2a \times \frac{1}{2} = 4$$

$$a = \pm 2$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 2, b = \frac{1}{2}a = 1$$

$$\therefore a + b = 3$$

25. 직선 $y = 2x + 1$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$

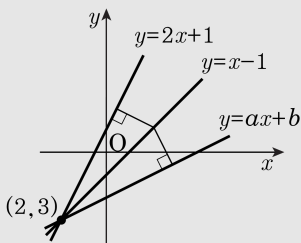
② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y + 3 = 0$

④ $2x - 3y + 4 = 0$

⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과 $y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.

$$\therefore 3 = 2a + b$$

ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서

$y = 2x + 1$, $y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.

$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한

$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면

$$a = 2, b = 1 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 2$$

($\because y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)