

1. 다항식 $x^3 - 3x - 3$ 을 다항식 $x^2 - 2x - 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $ax + b$ 이고, 나머지가 $cx + d$ 이었다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^3 - 3x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(ax + b) + cx + d$$

에서 계수를 비교하면

$$a = 1, -b + d = -3, -a - 2b + c = -3, b - 2a = 0$$

$$\text{에서 } a = 1, b = 2, d = -1, c = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 2 + (-1) + 2 = 4$$

2. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x+1$ 이고, 나머지가 $-6x+2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$$\begin{aligned} A &= B(2x+1) - 6x+2 \text{ 에서} \\ B(2x+1) &= 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\ \therefore B &= (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x+1) \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

3. 모든 실수 x 에 대하여 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 이라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - x + 1 &= a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d \\ x=2 \text{를 대입하면,} \\ \{2 \times (2)^3\} - (3 \times 2^2) - 2 + 1 &= a + b + c + d \\ \therefore a + b + c + d &= 3 \end{aligned}$$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1, x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

- ① $Q(3)+3$ ② $Q(3)+4$ ③ $2Q(3)+3$
④ $2Q(3)+4$ ⑤ $Q(3)$

해설

$f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 몫이 $Q(x)$ 일 때, 나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

$$f(1) = 1 \text{에서 } a + b = 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(2) = 2 \text{에서 } 2a + b = 2 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = 1, b = 0$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x$$

$f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는 $f(3)$ 이므로 $f(3) = 2Q(3) + 3$

5. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어 떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(1) - 2 = 0 \therefore 1 + a + b - 2 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1) + 2 = 0 \therefore 1 - a + b + 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = -3 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $a = 2, b = -1$

$$\therefore a - 2b = 4$$

6. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \dots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

- ① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})x^9 + \dots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 0$$

7. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ & \frac{1}{2} (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \\ & \therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ & (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

8. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

- ① 12 ② 8 ③ 4 ④ 0 ⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots ①$$

$$2x - y + z = 5 \cdots ②$$

$$① + ②: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$② \times 2 - ①: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, \quad 4c + 6b = 0, \quad 9b + 4c = 6$$

$$\text{위의 식을 연립하여 풀면, } a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3$$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

9. $f(x)$ 는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나누면 나머지는 $x+1$ 이라고 한다. $f(x)$ 를 x^2 으로 나눌 때, 나머지는?

- ① $x + \frac{1}{3}$ ② $x + \frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3} + 1$ ④ $\frac{x}{2} + 1$ ⑤ $\frac{x}{5} + 1$

해설

$f(x)$ 를 x^2 으로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = x^2Q(x) + ax + b$$

$$\{f(x)\}^3 = \{x^2Q(x) + ax + b\}^3$$

이것을 $x^2P(x) + (ax+b)^3$ 이라 하면

$\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지는

$(ax+b)^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지와 같으므로

$$(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 \text{에서}$$

$$3ab^2x + b^3 = x + 1$$

$$\therefore 3ab^2 = 1, b^3 = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}, b = 1$$

$$\therefore ax + b = \frac{x}{3} + 1$$

10. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(a+b)$ 는? (단, a, b 는 서로 다른 실수)

① $af(a) + bf(b)$

② $-af(a) + bf(b)$

③ $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$

④ $\frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$

⑤ $bf(a) - af(b)$

해설

$R(x) = cx + d$ 라 하면

$$f(a) = ac + d, f(b) = bc + d$$

$$\therefore f(a) - f(b) = (a - b)c$$

$$\therefore c = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\text{또 } f(a) + f(b) = (a + b)c + 2d$$

$$= \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b} + 2d$$

$$\therefore 2d = f(a) + f(b) - \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b}$$

$$= \frac{(a - b)\{f(a) + f(b)\}}{a - b} - \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b}$$

$$= \frac{1}{a - b} [af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - \{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b)\}]$$

$$= \frac{1}{a - b} \{af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - af(a) + af(b) -$$

$$bf(a) + bf(b)\} = \frac{2af(b) - 2bf(a)}{a - b}$$

$$\therefore d = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$\text{따라서 } R(a + b) = (a + b)c + d$$

$$= (a + b) \times \frac{f(a) - f(b)}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$= \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$= \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b) + af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$= \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$$